

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Applications en astrophysique de la gravitation modifiée

LEROY, Marie

Award date:
2014

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

UNIVERSITE DE NAMUR

Faculté des sciences



Applications en astrophysique de la gravitation modifiée

par

Marie Leroy

Namur

Année académique 2013-2014

Promoteur

André Füzfa

Présentation du mémoire en vue d'obtenir le grade de
Master en sciences mathématiques

Résumé :

Les trous noirs sont d'abord apparus en relativité générale comme solutions des équations d'Einstein. Ils sont caractérisés par la présence d'un horizon des événements, une surface dont même la lumière ne peut s'échapper. Ce sont des singularités de l'espace-temps. A l'heure actuelle, seuls les effets de ces objets sur les corps aux alentours ont été observés. Grâce à ces observations, la masse de certains trous noirs a pu être déterminée. Et dans certains cas, le spin (moment angulaire) a pu être estimé. Notamment pour le trou noir le plus proche de notre planète : Sagittarius A*, situé au centre de notre galaxie.

Le sujet principal de ce mémoire est la gravitation modifiée. Nous étudions un modèle issu de ces théories et nous cherchons notamment à créer une alternative au trou noir central de la galaxie. Nous présentons un modèle de théorie tenseur-scalaire dans lequel le champ de Higgs est non minimalement couplé à la gravitation. A partir d'un lagrangien donné, nous dérivons les équations du champ gravitationnel et du champ de Higgs. Nous les intégrons numériquement et nous analysons certaines solutions particulières : les « monopoles de Higgs », des solutions globalement régulières asymptotiquement plates et d'énergie finie pour le champ de Higgs. Nous en faisons une comparaison détaillée avec les équations du champ et les solutions correspondantes en relativité générale, celles de Schwarzschild. Puis, nous adaptons ce modèle à un corps central qui présente une masse et une compacité semblable à celle de Sagittarius A*, ce qui constitue un début d'alternative au trou noir central de la galaxie. Nous traçons les géodésiques dans l'espace-temps obtenu autour de cette alternative et nous les comparons avec celles issues de l'espace-temps de Schwarzschild afin de mettre en évidence les effets du champ de Higgs. Pour finir et afin de compléter ce début d'alternative, nous incluons la rotation au modèle des monopoles de Higgs et dérivons les équations des champs.

Ce mémoire reprend les résultats principaux que j'ai obtenus pendant mon travail d'initiation à la recherche ces 18 derniers mois. Toute la partie sur les monopoles de Higgs a été étudiée à l'UNamur et les résultats en rapport avec les géodésiques ont été produits et analysés à l'aide de logiciels développés dans l'équipe Relativité et Objets Compacts, au Laboratoire de l'Univers et de ses Théories de l'Observatoire de Paris, à Meudon.

Abstract :

We present a scalar-tensor model which take into account the Higgs field nonminimally coupled to gravity. We start by a given lagrangian and we derive the fields equations, we integrate those equations and we study numerically the solutions. Furthermore, we focus on « Higgs monopoles », a family of spherically symmetric particlelike solutions. These monopoles are the only globally regular and asymptotically flat distribution with finite energy of the Higgs field around compact objects. Also we compare these solutions to the Schwarzschild's one. After that, we adapt the model for a body like Sagittarius A* (black hole in the galactic's center). This constitutes a alternative to this black hole. We also study the geodesics (for light and matter) around this object. And last but not least, to complete this alternative, we derive the fields equations for the case of rotating « Higgs monopole » model.

This work is a summary of my results obtained during the last 18 months. The Higgs monopoles have been studied at UNamur and all the results about geodesics have been worked out at the Observatoire de Paris.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude envers les personnes qui m'ont aidée à mettre en œuvre le présent mémoire et sans qui il n'aurait pas vu le jour.

Pour commencer, je souhaite remercier mon promoteur : André Füzfa, pour ses conseils, ses encouragements et son soutien durant ces deux dernières années. Ensuite, je voudrais adresser un merci tout particulier à Eric Gourgoulhon qui fut mon maître de stage à l'Observatoire de Paris durant mon stage de fin d'études. Je le remercie pour son aide précieuse, sa patience et surtout pour le regard nouveau qu'il m'a apporté sur l'astrophysique en général. Je souhaite remercier l'équipe ROC du LUTH pour leur accueil et leur gentillesse durant mon stage. Je remercie bien entendu tous mes re-lecteurs : Aurélien Sourie, Eve-Aline Dubois et Sandrine Schlögel pour leurs remarques pertinentes et leurs conseils avisés. Je souhaite remercier ma famille et mes amis, particulièrement à Frédéric Ambroise, pour leur soutien durant mon stage, ainsi que Jonathan Pirau pour avoir toujours cru en moi.

Pour finir, je souhaite une bonne lecture à quiconque lira ce mémoire et tout particulièrement, aux premiers, les membres de mon jury.

Table des matières

I	Introduction	1
1	La relativité générale	2
1.1	Les principes d'équivalence	2
1.2	Les tenseurs	3
1.2.1	Dérivée covariante et connexion affine	3
1.2.2	L'équation des géodésiques	3
1.2.3	Le tenseur de Riemann	4
1.2.4	Le tenseur de Ricci	4
1.2.5	Le scalaire de courbure	4
1.2.6	Le tenseur d'Einstein	4
1.3	Les équations d'Einstein	5
1.4	La conservation de l'énergie	5
1.5	Le formalisme 3+1	6
2	Le principe variationnel	8
2.1	La démarche générale	8
2.2	Adaptation à la théorie des champs	8
2.3	La forme standard	9
2.4	Le cas de la relativité générale	10
2.5	Ajout de la matière	13
II	L'espace-temps en relativité générale	14
3	Les solutions de Schwarzschild	15
3.1	La géométrie de Schwarzschild	15
3.2	La solution extérieure	16
3.3	La solution intérieure	17
3.4	La pression à l'intérieur du corps	17
3.5	L'expression analytique des solutions	18
3.6	Les équations du champ gravitationnel par principe variationnel	19
3.7	Les solutions par intégration numérique	22
3.8	Les masses baryonique et ADM	24
4	Les géodésiques dans l'espace-temps de Schwarzschild	28
4.1	Procédure lagrangienne pour obtenir les géodésiques	28
4.2	Les trajectoires des particules massives	29
4.3	Les mouvements circulaires	30
4.4	Les rosaces	33

4.5	L'avance du périastre	35
4.6	Les géodésiques lumières	36
III	La gravitation modifiée	39
5	Contexte	40
5.1	Le modèle standard de la physique des particules	40
5.2	Le champ et les bosons de Higgs	40
5.3	Les théories tenseur-scalaire de la gravitation	41
5.4	Les monopoles de Higgs	42
5.5	Les trous noirs	43
6	Les monopoles de Higgs	45
6.1	La configuration initiale	45
6.2	Le lagrangien effectif	46
6.3	Les équations du champ gravitationnel et du champ de Higgs	48
6.4	Expressions des termes relatifs à la matière dans les équations du champ gravita- tionnel	50
6.5	La pression et le tenseur énergie-impulsion	52
6.6	Intégration des équations	52
6.6.1	Changement de variables	53
6.6.2	Démarche générale	54
6.6.3	Intégration numérique	55
6.6.4	Intégration analytique	55
6.6.5	Comparaison des deux méthodes d'intégration	55
6.6.6	Contrainte hamiltonienne	56
6.7	L'équation de Klein-Gordon revisitée et le potentiel effectif	57
6.8	Les monopoles	58
6.9	Écart à la solution de Schwarzschild	59
6.10	La masse ADM	61
7	Construction d'une alternative au trou noir Sagittarius A*	63
7.1	La compacité	63
7.2	Le paramètre de couplage	66
7.3	La masse ADM	67
7.4	Comparaison des orbites matérielles avec Schwarzschild	68
7.5	Comparaison des géodésiques lumières avec Schwarzschild	72
8	Les monopoles de Higgs en rotation	75
8.1	Le contexte général	75
8.2	Les équations du champ gravitationnel	76
8.3	L'équation du champ	78
8.4	Les perspectives	78
	Conclusion	78
	Annexes	81

A	Les tenseurs relatifs à la métrique en coordonnées aréolaires	82
A.1	Les coefficients de connexion	82
A.2	Le tenseur de Ricci	83
A.3	Le scalaire de courbure	83
A.4	Le tenseur d'Einstein	83
B	La masse ADM	84
C	Les tenseurs énergie-impulsion pour les monopoles et les monopoles en rotation	86
D	Les logiciels utilisés	90
D.1	Matlab	90
D.2	LORENE	91
D.3	GYOTO	91
D.4	SageManifolds	92
E	Les unités utilisées	93
E.1	L'électron-volt	93
E.2	En général	93
E.3	Les unités en relativité générale et en théorie des champs	94
E.4	Récapitulatif	95
	Bibliographie	96

Première partie

Introduction

Chapitre 1

La relativité générale

Dans ce chapitre, nous reprenons les concepts théoriques et les équations qui nous seront utiles tout au long de ce mémoire. Pour écrire ce chapitre, nous nous sommes essentiellement basés sur les références [4] (pp.57-105) et [19].

Pour commencer, la relativité générale est la théorie moderne de la gravitation. Cette théorie impose une métrique dépendante de la position et du temps par rapport aux masses car elles déforment et courbent l'espace-temps. Un espace-temps est une variété différentiable munie d'une métrique pseudo riemannienne ; une variété différentiable est un espace topologique localement homéomorphe à \mathbb{R}^n et possédant certaines propriétés de différentiabilité.

Remarque générale : nous utiliserons la convention de signe pour la métrique $(-, +, +, +)$ tout au long de ce mémoire.

1.1 Les principes d'équivalence

En physique galiléenne, le principe d'équivalence stipule que tous les corps tombent de la même façon *i.e.* la chute libre est universelle. Pour un observateur qui est en chute libre, les effets de la gravité ne sont pas ressentis. Il s'ensuit qu'il n'y pas de différence entre les lois de la physique dans un référentiel en chute libre soumis à un champ gravitationnel et celles dans un repère inertiel non soumis à une force gravitationnelle.

Einstein introduit une modification de ce principe : l'universalité de la chute libre pour toutes les formes d'énergies non gravitationnelles. Le principe d'équivalence d'Einstein est basé sur l'hypothèse que la gravitation est décrite par une métrique localement diagonalisable en géométrie pseudo-riemannienne. Ce qui implique qu'un espace-temps courbe peut être approximé localement par son espace tangent (espace-temps de Minkowski) dans lequel les lois de la relativité restreinte sont d'application. Il existe aussi un principe d'équivalence fort. Il stipule que la chute libre est universelle quelque soit la forme d'énergie (elle peut être gravitationnelle). Nous pouvons illustrer ce principe par la phrase suivante [19] : « Dans un laboratoire en chute libre, dénué de rotation, et qui occupe une petite région de l'espace-temps, les lois de la physique sont les mêmes qu'en relativité restreinte ».

Par la suite, nous étudierons des théories où le principe d'équivalence fort n'est plus valable. Dans ces théories, la constante de gravitation de Newton varie avec un champ scalaire et l'énergie de liaison gravitationnelle varie avec elle, ce qui n'est pas en accord avec le principe d'équivalence fort.

1.2 Les tenseurs

Les tenseurs sont des objets intrinsèques pour une variété différentiable. Ils sont utilisés en relativité générale pour décrire l'espace-temps. Nous définissons ici les tenseurs les plus généraux et ceux qui nous seront utiles par la suite.

Remarque : nous utilisons le système de coordonnées générales $\{x^\lambda\}_{\lambda=0,1,2,3}$.

1.2.1 Dérivée covariante et connexion affine

L'opérateur dérivée covariante appliqué aux vecteurs de la base naturelle $\{e_\mu\}$ définit les coefficients de connexion affine :

$$\nabla_\alpha e_\mu = \Gamma_{\alpha\mu}^\rho e_\rho \quad (1.1)$$

où $\Gamma_{\alpha\mu}^\rho$ est la connexion affine (pour la définition voir ci-dessous).

Si nous considérons maintenant un champ de vecteurs v . Les coordonnées contravariantes de ce champ de vecteurs dans la base naturelle sont v^μ telles que $v = v^\mu e_\mu$. La dérivée covariante de v est donnée par l'expression (1.2).

$$\nabla_\alpha v = \nabla_\alpha v^\mu e_\mu + v^\mu \nabla_\alpha e_\mu = (\partial_\alpha v^\mu + v^\rho \Gamma_{\alpha\rho}^\mu) e_\mu \quad (1.2)$$

Lorsque la torsion est non nulle et que la connexion est métrique, elle s'écrit explicitement sous la forme (1.3).

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\eta} (\partial_\mu g_{\nu\eta} + \partial_\nu g_{\mu\eta} - \partial_\eta g_{\mu\nu}). \quad (1.3)$$

Avec $g_{\mu\nu}$ la métrique qui décrit l'espace-temps.

Remarque : elle dépend des dérivées premières de la métrique, nous avons utilisé la notation suivante :

$$\partial_\lambda = \frac{\partial}{\partial x^\lambda}.$$

La connexion (1.3) est symétrique par rapport à ses deux indices du bas (1.4). On la nomme connexion de Levi-Civita.

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho \quad (1.4)$$

Notons que la connexion est métrique si :

$$(\nabla_\lambda g)_{\mu\nu} = 0 \quad (1.5)$$

ou

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa g_{\kappa\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\kappa g_{\kappa\mu} = 0. \quad (1.6)$$

1.2.2 L'équation des géodésiques

Dans un espace métrique, une géodésique désigne le chemin de longueur extrémale entre deux points. C'est une généralisation des lignes droites dans les espaces plats. L'équation des géodésiques pour une particule massive est :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (1.7)$$

où λ désigne un paramètre de la courbe, $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ est la connexion de Levi-Civita et x est la trajectoire extrémale entre deux points.

1.2.3 Le tenseur de Riemann

Le tenseur de Riemann (1.8) représente la courbure intrinsèque de la variété.

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha_{\lambda\gamma} \Gamma^\lambda_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\lambda\delta} \Gamma^\lambda_{\beta\gamma} \quad (1.8)$$

Ce tenseur présente un certain nombre de symétries et de propriétés :

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta}; \quad (1.9)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}; \quad (1.10)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}; \quad (1.11)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} = 0; \quad (1.12)$$

$$\nabla_\xi R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \nabla_\gamma R_{\alpha\beta\delta\xi} + \nabla_\delta R_{\alpha\beta\xi\gamma} = 0 \quad (1.13)$$

où $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\mu} R^\mu_{\beta\gamma\delta}$ (attention à la convention d'Einstein¹).

Remarque : l'expression (1.12) est appelée identité cyclique et l'expression (1.13) est appelée identité de Bianchi.

1.2.4 Le tenseur de Ricci

La seule contraction non nulle du tenseur de Riemann définit le tenseur de Ricci :

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}. \quad (1.14)$$

Remarque : ce tenseur est symétrique par rapport à ses deux indices.

1.2.5 Le scalaire de courbure

Le scalaire de courbure (1.15) est défini comme étant la somme des éléments diagonaux du tenseur de Ricci. C'est l'outil le plus simple pour décrire la courbure d'une variété.

$$\mathcal{R} = R^\mu_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\nu\mu} \quad (1.15)$$

1.2.6 Le tenseur d'Einstein

Le tenseur d'Einstein (1.16) est au cœur des équations d'Einstein, le pilier de la théorie de la relativité générale (voir section suivante).

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} \quad (1.16)$$

1. Lorsqu'un indice apparait une fois au-dessus et une fois en-dessous, cela indique une sommation sur cet indice.

1.3 Les équations d'Einstein

Les équations d'Einstein (1.17) sont très importantes en théorie de la relativité générale car décrivent l'espace-temps. Elles détaillent la manière dont la matière et l'énergie déforment ce dernier.

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.17)$$

où Λ est la constante cosmologique, c la vitesse de la lumière, G la constante gravitationnelle et $T_{\mu\nu}$ le tenseur énergie-impulsion.

Remarque : Nous travaillons avec une constante cosmologique nulle durant tout le travail.

Pour illustrer l'idée sous tendue par le tenseur énergie-impulsion, nous en donnons l'exemple pour un fluide parfait². Le tenseur énergie-impulsion associé à un tel fluide est donné par

$$T^{\mu\nu} = (\rho + \frac{p}{c^2}) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} \quad (1.18)$$

où p est la pression, ρ la densité de matière du fluide, u^μ la quadri-vitesse du fluide et $g^{\mu\nu}$ la métrique du système en coordonnées contravariantes. Ce tenseur dépend bien sûr du type de matière que nous considérons (présence de p et ρ) ([19] pp. 176-179).

1.4 La conservation de l'énergie

Nous généralisons ici le concept de conservation de l'énergie de la mécanique classique en relativité générale.

En partant de l'expression de la dérivée covariante du tenseur de Ricci et du scalaire de courbure, nous pouvons nous servir de l'identité de Bianchi (1.13) pour écrire :

$$\nabla_\xi R_{\beta\gamma} + \nabla_\gamma R_{\beta\alpha\xi}^\alpha + \nabla_\alpha R_{\beta\xi\gamma}^\alpha = 0 \quad (1.19)$$

où nous avons contracté les indices α et δ .

En utilisant (1.10) nous pouvons écrire :

$$\nabla_\xi R_{\beta\gamma} - \nabla_\gamma R_{\beta\xi} + \nabla_\alpha R_{\beta\xi\gamma}^\alpha = 0. \quad (1.20)$$

En faisant monter l'indice β et en le contractant avec ξ , nous obtenons :

$$\nabla_\beta R_\gamma^\beta - \nabla_\gamma \mathcal{R} + \nabla_\alpha R_{\beta\gamma}^{\alpha\beta} = 0. \quad (1.21)$$

En utilisant l'identité (1.9), nous pouvons écrire :

$$\nabla_\alpha R_{\beta\gamma}^{\alpha\beta} = \nabla_\beta R_\gamma^\beta \quad (1.22)$$

et en remplaçant dans (1.21), nous obtenons :

$$\nabla_\beta (2R_\gamma^\beta - \delta_\gamma^\beta \mathcal{R}) = 0. \quad (1.23)$$

2. Un fluide parfait n'admet pas de force entre les particules, pas de conduction de chaleur et est non visqueux.

Nous abaissons l'indice β et divisons par 2 pour écrire :

$$\nabla^\beta \left(R_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} g_{\beta\gamma} \mathcal{R} \right) = 0 \quad (1.24)$$

où nous reconnaissons le tenseur d'Einstein (1.17).

En nous référant à (1.5) et (1.17), nous pouvons écrire :

$$\nabla^\beta T_{\beta\gamma} = 0. \quad (1.25)$$

Remarquons qu'en l'absence de gravitation et dans un espace de Minkowski, cette équation représente bien la conservation de l'énergie et de l'impulsion. Par contre, en présence d'un champ gravitationnel, l'énergie et l'impulsion du fluide sont conservées en tenant compte de l'interaction avec ce champ. La formule (1.25) représente alors l'équation du mouvement de la matière en présence du champ gravitationnel.

1.5 Le formalisme 3+1

Dans cette section, nous expliquons une façon simple de décrire l'espace-temps en relativité générale. Celle-ci sera utile lorsque nous dériverons les équations d'Einstein par principe variationnel et que nous tracerons les géodésiques associées à l'espace-temps qui en découle.

Ce formalisme est basé sur un feuilletage de l'espace-temps [13] (pp. 55-64). En effet, au lieu de considérer une variété M dans son ensemble, nous considérons un ensemble d'hypersurfaces $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ de genre espace qui recouvre complètement cette variété. Nous pouvons alors travailler avec la 3-métrique relative à un certain Σ_t . Cette démarche revient à faire une décomposition de l'espace et du temps.

Nous pouvons aussi définir le feuilletage de façon mathématique ; soit un champ scalaire régulier \tilde{t} sur la variété M tel que chaque hypersurface est repérée grâce à une valeur de \tilde{t} :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \Sigma_t := \{p \in M, \tilde{t}(p) = t\}$$

avec $M = \cup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma_t$. Notons \vec{n} le vecteur normal unitaire à la feuille Σ_t , celui-ci est co-linéaire au vecteur $\vec{\nabla}t$ ($\nabla^a t = g^{ab} \nabla_b t = g^{ab} (dt)_b$) et est de genre temps (car Σ_t est de genre espace). De sorte que nous pouvons écrire :

$$\vec{n} := -N \vec{\nabla}t \quad (1.26)$$

avec $N := \left(-\vec{\nabla}t \cdot \vec{\nabla}t \right)^{-1/2}$. La fonction N ainsi définie est appelée fonction Lapse. Le vecteur d'évolution normal \vec{m} peut être défini comme un vecteur normal à Σ_t et tel que :

$$\vec{m} := N \vec{n}. \quad (1.27)$$

Nous avons aussi $\vec{m} \cdot \vec{m} = -N^2$, ce qui implique

$$\nabla t (\vec{m}) = m^\mu \nabla_\mu t = 1. \quad (1.28)$$

Nous pouvons alors établir que l'hypersurface $\Sigma_{t+\delta t}$ peut être obtenue en utilisant le voisinage de Σ_t . En effet, soit un point p de l'hypersurface Σ_t , nous utilisons le vecteur infinitésimal $\delta t \vec{m}$

pour se déplacer du point p vers le point $p' = p + \delta t \vec{m}$. Nous pouvons alors calculer la valeur du champ \tilde{t} au point p' :

$$t(p') = t(p + \delta t \vec{m}) = t(p) + \nabla t(\delta t \vec{m}) = t(p) + \delta t \nabla t(\vec{m}) = t(p) + \delta t \quad (1.29)$$

où nous avons utilisé (1.28).

Une notion intéressante en formalisme 3+1 est celle d'observateur eulérien. Puisque \vec{n} est un vecteur de genre temps, il peut être vu comme la quadri-vitesse d'un certain observateur, appelé observateur eulérien. Les lignes d'univers d'un tel observateur sont orthogonales à l'hypersurface Σ_t . Nous pouvons alors donner un sens à l'appellation de la fonction Lapse : soient deux événements proches p et p' sur la ligne d'univers d'un observateur eulérien et soit t la coordonnée en temps associée à p et $t + \delta t$ la coordonnée en temps associée à p' , nous avons alors $p \in \Sigma_t$ et $p' \in \Sigma_{t+\delta t}$ et $p' = p + \delta t \vec{m}$ (cf. (1.29)). Le temps propre $\delta\tau$ mesuré entre ces deux événements par l'observateur eulérien est donné par :

$$\delta\tau = \sqrt{-g(\delta\vec{m}, \delta\vec{m})} = \sqrt{-g(\vec{m}, \vec{m})} \delta t = N \delta t. \quad (1.30)$$

Nous pouvons alors dire que la fonction Lapse N fait référence à la coordonnée en temps t correspondante aux feuilles du feuilletage au temps physique τ mesuré par l'observateur eulérien [13].

Dans la suite de ce mémoire, nous utiliserons la décomposition 3+1 pour déduire les équations du champ gravitationnel en géométrie de Schwarzschild ainsi que les équations du champ gravitationnel et du champ scalaire dans le cas de la gravitation modifiée. De plus, ce formalisme est utilisé par les programmes LORENE et GYOTO ([18], [25] et [26]) dont nous nous servirons plus tard pour tracer les géodésiques dans les espaces-temps étudiés.

Le chapitre suivant est consacré aux rappels théoriques sur le principe variationnel. Nous y rappelons les grandes lignes et nous y expliquons comment l'adapter à la théorie des champs dans le but de l'utiliser en relativité générale.

Chapitre 2

Le principe variationnel

Dans ce chapitre, nous montrons comment déduire les équations d'Einstein par le principe variationnel pour une métrique et un lagrangien donnés. Nous nous en servons quelques fois par la suite car c'est une méthode assez simple et claire pour écrire les équations du champ gravitationnel (nous n'avons plus besoin de tenseur). Et cela peut se faire comme un problème de mécanique lagrangienne habituel.

2.1 La démarche générale

Comme en mécanique classique, ce principe vise à rendre stationnaire une certaine fonctionnelle :

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx. \quad (2.1)$$

L'équation d'Euler associée à cette fonctionnelle est :

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0. \quad (2.2)$$

Un cas particulier intéressant est obtenu en posant $y(x) \equiv q(t)$, avec q un degré de liberté et t un paramètre (en général le temps). La fonction f est alors le lagrangien du système $f = L(q, \dot{q}, t)$. La fonctionnelle associée est appelée action du système. L'équation d'Euler-Lagrange est la suivante :

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \quad (2.3)$$

Ce système admet une équation pour chaque degré de liberté.

2.2 Adaptation à la théorie des champs

Nous adaptons cette méthode à la théorie des champs dans le but de l'utiliser en relativité générale pour déduire les équations d'Einstein. Dans ce cas, les coordonnées $q(t)$ sont un ensemble de champs scalaires : $\phi^i(x^\mu)$ et leurs dérivées sont : $\partial_\mu \phi(x^\rho) = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$.

Soit L le lagrangien d'un système, nous définissons la densité lagrangienne \mathcal{L} par :

$$L = \int d^3x \sqrt{-g} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \quad (2.4)$$

l'action associée est :

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(\phi, \partial_\mu \phi) dt \quad (2.5)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$S = \int dV_\Omega \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (2.6)$$

Nous pouvons alors écrire l'équation d'Euler-Lagrange associée à l'action S :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\mu \phi)} \right) = 0. \quad (2.7)$$

Nous supposons que la variation du champ $\delta\phi(x^\mu)$ est nulle sur le contour $\delta\Omega$ ce qui implique que la valeur du champ y est fixée.

Rappelons le théorème d'Ostrogradsky [22] :

$$\int_\Omega \vec{\nabla} \cdot (\vec{\psi}) = \int_{\partial\Omega} [\vec{\psi}] \cdot d\vec{S} = 0. \quad (2.8)$$

Nous pouvons aussi l'écrire comme :

$$\int_\Omega \partial_\mu \psi^\mu d^4x = \int_{\partial\Omega} \psi^\mu n_\mu d^3x = 0. \quad (2.9)$$

Celui-ci implique que les termes en dérivées totales du lagrangien n'influencent pas la dynamique du système.

2.3 La forme standard

La densité lagrangienne pour un champ scalaire standard ϕ est donnée par :

$$\mathcal{L}_\phi = \underbrace{\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) (\partial_\nu \phi)}_{E.C.} - \underbrace{V(\phi)}_{E.P.}$$

où $E.C.$ indique le terme relatif à l'énergie cinétique et $E.P.$ le terme relatif à l'énergie potentielle du système.

Nous explicitons ici le cheminement pour obtenir l'équation variationnelle relative au champ (equation de Klein-Gordon) :

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}_\phi}{\partial (\nabla_\mu \phi)} = g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \\ \frac{\partial \mathcal{L}_\phi}{\partial \phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi} \end{array} \right. \\ & \Rightarrow \nabla_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_\phi}{\partial (\nabla_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_\phi}{\partial \phi} = 0 \\ & \Leftrightarrow \\ & g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \square\phi + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0.$$

avec \square l'opérateur d'Alembertien¹ et $\nabla_\mu\phi = \partial_\mu\phi$ car ϕ est un champ scalaire.

2.4 Le cas de la relativité générale

En relativité générale, nous utilisons un champ tensoriel pour décrire la gravitation : $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^\rho)$ i.e. la métrique est fonction des coordonnées. L'action dans ce cas s'écrit :

$$S_{grav} = S_{grav}[g_{\mu\nu}, \partial_\sigma g_{\mu\nu}].$$

Afin de définir une action, il faut commencer par choisir une densité lagrangienne. Deux conditions sont nécessaires pour définir une densité lagrangienne correctement en relativité générale :

1. Elle doit être invariante sous transformation générale de coordonnées (doit être scalaire) ;
2. Elle doit dépendre de la métrique et de ses dérivées premières (éventuellement des secondes) afin d'introduire une dynamique.

Il existe plusieurs densités lagrangiennes qui répondent à ces critères. Nous choisissons de prendre $\mathcal{L} = \mathcal{R}$ et l'action correspondante est l'action d'Einstein-Hilbert. C'est celle que nous utiliserons pour décrire l'espace-temps en relativité générale, nous la notons S_{EH} :

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int_R d^4x \sqrt{-g} \mathcal{R} \quad (2.10)$$

avec \mathcal{R} le scalaire de courbure défini en (1.15) et g le déterminant de la métrique.

Nous pouvons maintenant dériver les équations d'Einstein par le principe variationnel. Pour commencer, nous n'introduisons pas de terme de matière et nous analysons la variation de S_{EH} en imposant :

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}.$$

Rappelons que sur le bord de la variété R , $\delta g^{\mu\nu}$ et $\partial_\rho g^{\mu\nu}$ s'annulent.

Nous pouvons alors calculer la variation infinitésimale de l'action :

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int_R d^4x \delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) \quad (2.11)$$

$$= \frac{1}{2\kappa} \left[\int_R d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \int_R d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \int_R d^4x \delta(\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \right] \quad (2.12)$$

$$= \frac{1}{2\kappa} [\delta S_1 + \delta S_2 + \delta S_3] \quad (2.13)$$

$$(2.14)$$

Modifions les expressions δS_1 , δS_2 et δS_3 afin de les écrire en fonction de $\delta g^{\mu\nu}$.

Rappelons que \mathcal{R} , le scalaire de courbure est défini par :

$$\mathcal{R} = R^\mu_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

1. $\square\phi = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi$ ou $\square\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi)$ avec g le déterminant de la métrique.

et le tenseur de Riemann par :

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}.$$

Avant de commencer, nous introduisons quelques identités importantes :

$$\delta(g^{\mu\rho}g_{\rho\nu}) = \delta(\delta^\mu_\nu) = 0 \quad (2.15)$$

$$\delta g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = -g^{\mu\rho}\delta g_{\rho\nu} \quad (2.16)$$

$$\delta g^{\mu\rho}\delta^\sigma_\rho = -g^{\nu\sigma}g^{\mu\rho}\delta g_{\rho\nu} \quad (2.17)$$

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\nu\sigma}g^{\mu\rho}\delta g_{\rho\sigma}. \quad (2.18)$$

Commençons par transformer δS_2 .

Nous nous référons à la définition du tenseur de Riemann (1.8) et nous remarquons que l'expression $\delta R_{\mu\nu}$ fait intervenir $\delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$. Notons que ces variations infimes sont des tenseurs contrairement à $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ [9]. Nous pouvons alors écrire [22] :

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\rho_{\mu\rho}.$$

Nous réécrivons δS_2 :

$$\delta S_2 = \int_R d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \{ \nabla_\rho \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\rho_{\mu\rho} \}. \quad (2.19)$$

En tenant compte du fait que $\nabla g = 0$, nous pouvons écrire :

$$\delta S_2 = \int_R d^4x \sqrt{-g} \{ \nabla_\rho (g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}) - (\nabla_\rho g_{\mu\nu}) \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} \} \quad (2.20)$$

$$- \int_R d^4x \sqrt{-g} \{ \nabla_\nu (g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\rho_{\mu\rho}) - (\nabla_\nu g_{\mu\nu}) \delta\Gamma^\rho_{\mu\rho} \} \quad (2.21)$$

$$= \int_R d^4x \sqrt{-g} \{ \nabla_\rho (g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}) - \nabla_\nu (g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\rho_{\mu\rho}) \} \quad (2.22)$$

$$= \int_R d^4x \sqrt{-g} \nabla_\nu \{ (g^{\mu\rho} \delta\Gamma^\nu_{\mu\rho}) - (g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\rho_{\mu\rho}) \}. \quad (2.23)$$

Ensuite, nous utilisons le théorème d'Ostrograsky (2.8) pour exprimer :

$$\delta S_2 = \int_{\partial R} d^3y \sqrt{-\gamma} n_\nu \{ (g^{\mu\rho} \delta\Gamma^\nu_{\mu\rho}) - (g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\rho_{\mu\rho}) \} \quad (2.24)$$

avec ∂R la frontière de la variété, γ le déterminant de la métrique induite à la frontière et n_ν un vecteur normal unitaire à la frontière.

Cette intégrale est nulle car nous avons supposé que sur le bord de la variété R (*i.e.* sur ∂R), $\delta g^{\mu\nu}$ et $\partial_\rho g^{\mu\nu}$ s'annulent (et donc les $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$). Nous avons donc :

$$\delta S_2 = 0$$

Pour ce qui est de δS_3 , nous procédons par généralisation sur des exemples pour donner l'expression de $\delta g = \delta(\det g_{\mu\nu})$ et déduire celle de $\delta\sqrt{-g}$.

Commençons par développer le déterminant d'une métrique $g_{\mu\nu}$ de dimension 2 :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g &= g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} \\ \Rightarrow \delta g &= \delta g_{11}g_{22} + g_{11}\delta g_{22} - \delta g_{12}g_{21} - g_{12}\delta g_{21}. \end{aligned}$$

En dimensions 3, nous avons :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g &= g_{11}(g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32}) - g_{12}(g_{21}g_{33} - g_{23}g_{31}) + g_{13}(g_{21}g_{23} - g_{22}g_{31}). \\ \Rightarrow \delta g &= \delta g_{11}(g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32}) + g_{11}(\delta g_{22}g_{33} + g_{22}\delta g_{33} - \delta g_{23}g_{32} - g_{23}\delta g_{32}) - \delta g_{12}(g_{21}g_{33} - g_{23}g_{31}) - \\ &\quad g_{12}(\delta g_{21}g_{33} + g_{21}\delta g_{33} - \delta g_{23}g_{31} - g_{23}\delta g_{31}) + \delta g_{13}(g_{21}g_{23} - g_{22}g_{31}) \\ &\quad + g_{13}(\delta g_{21}g_{23} + g_{21}\delta g_{23} - \delta g_{22}g_{31} - g_{22}\delta g_{31}). \\ &= \delta g_{11}(g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32}) + \delta g_{22}(g_{11}g_{33} - g_{31}g_{13}) + \delta g_{33}(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}) + \dots \end{aligned}$$

Une formule généralisée serait alors

$$\delta g = \sum_{i,j=1}^n \delta g_{ij} Min_{ij} \quad (2.25)$$

avec Min_{ij} , le cofacteur associé à l'élément g_{ij} de la métrique.

Or [22],

$$[g_{\mu\nu}]_{\rho\sigma} = [(g_{\mu\nu})^{-1}]_{\rho\sigma} = \frac{1}{g} Min_{\rho\sigma}. \quad (2.26)$$

En utilisant (2.16), (2.25) et (2.26), nous pouvons écrire

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (2.27)$$

$$= -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.28)$$

et déduire l'expression de $\delta\sqrt{-g}$:

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{-1}{2\sqrt{-g}} \delta g \quad (2.29)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-g}} (g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) \quad (2.30)$$

$$= -\frac{(-g)}{2\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.31)$$

$$= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.32)$$

Et nous pouvons écrire :

$$\delta S_3 = -\frac{1}{2} \int_R d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \mathcal{R}. \quad (2.33)$$

En rassemblant nos résultats, nous pouvons ré-exprimer δS_{EH} en fonction de $\delta g^{\mu\nu}$:

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int_R d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} \right) = 0. \quad (2.34)$$

Étant donné que $g_{\mu\nu}$ est une métrique arbitraire, nous pouvons déduire que (2.34) est vérifiée *ssi*

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} = 0. \quad (2.35)$$

Nous retrouvons l'équation d'Einstein dans le vide (1.17).

2.5 Ajout de la matière

Lorsque nous voulons rendre compte des effets de la matière, nous devons considérer l'action totale suivante :

$$S_{tot} = S_{EH} + S_{mat}$$

avec S_{mat} l'action relative à la matière telle que $S_{mat}[\psi_{mat}, \partial_\mu \psi_{mat}] = \int_R d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{mat}$, ψ_{mat} décrit le(s) champ(s) de matière et \mathcal{L}_{mat} la densité lagrangienne de la matière.

La variation de l'action relative à la matière est :

$$\delta S_{mat} = \int_R d^4x \left[\frac{\partial(\mathcal{L}_{mat} \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\mathcal{L}_{mat} \sqrt{-g})}{\partial(\partial_\rho g^{\mu\nu})} \delta(\partial_\rho g^{\mu\nu}) \right]$$

Nous utilisons le théorème de divergence, l'intégration par parties et le fait que $\delta g^{\mu\nu} = 0$ sur le contour pour écrire :

$$\delta S_{mat} = \int_R d^4x \left[\frac{\partial(\mathcal{L}_{mat} \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\rho \left(\frac{\partial(\mathcal{L}_{mat} \sqrt{-g})}{\partial(\partial_\rho g^{\mu\nu})} \right) \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.36)$$

Puisque δS_{tot} est nulle par définition, nous avons $\delta S_{EH} = -\delta S_{mat}$. L'expression de δS_{EH} est donnée par (2.34), il s'ensuit que

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.37)$$

avec $T_{\mu\nu}$ le tenseur énergie-impulsion tel que

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left[\frac{\partial(\mathcal{L}_{mat} \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\rho \left(\frac{\partial(\mathcal{L}_{mat} \sqrt{-g})}{\partial(\partial_\rho g^{\mu\nu})} \right) \right].$$

La partie suivante est consacrée à l'espace-temps en relativité générale. Nous écrivons les équations du champ gravitationnel relatives à l'espace-temps de Schwarzschild de deux manières différentes : de manière tensorielle et par principe variationnel. Nous présentons les solutions analytiques et numériques de ces équations. Ensuite, nous étudions les orbites d'étoiles dans l'espace-temps obtenu et nous les traçons à l'aide du logiciel GYOTO ([25] et [26]).

Deuxième partie

L'espace-temps en relativité générale

Chapitre 3

Les solutions de Schwarzschild

Comme précisé dans le chapitre 1, les équations d'Einstein (1.17) décrivent de quelle manière la masse et l'énergie déforment l'espace-temps. Nous explicitons dans ce chapitre la première solution (tenant compte d'une masse) apportée à ces équations. Ce chapitre est basé sur [4], [8] et [22].

3.1 La géométrie de Schwarzschild

Nous utilisons la métrique en coordonnées aréolaires munie de la jauge de Schwarzschild (3.1)¹ pour décrire ce qu'il se passe dans l'espace-temps lorsque celui-ci est déformé par un corps sphérique, statique, de masse M et vide à l'extérieur (ex. : une étoile, une planète ou un trou noir). Nous déduisons les expressions des fonctions $\nu(r)$ et $\lambda(r)$ afin d'écrire la métrique qui représente cet espace-temps. La métrique sera la métrique de Schwarzschild et elle détermine l'espace-temps de Schwarzschild.

$$ds^2 = -e^{2\nu(r)}c^2dt^2 + e^{2\lambda(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \quad (3.1)$$

En guise d'exercice, nous avons résolu analytiquement les équations d'Einstein à l'intérieur et à l'extérieur du corps sphérique. Nous présentons ici les solutions et analysons les résultats.

Pour ce faire, définissons les éléments suivants :

- t : la coordonnée de temps telle que $t \in \mathbb{R}$;
- r : la distance radiale telle que $r \in \mathbb{R}^+$;
- θ : la colatitute telle que $\theta \in [0, \pi]$;
- ϕ : la longitude telle que $\phi \in [0, 2\pi]$.

Rappelons que nous considérons un espace métrique, à symétrie sphérique, statique et vide à l'extérieur du corps central (non chargé). Nous pouvons donc supposer que les éléments de la métrique sont invariants lorsque nous appliquons le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{cases} \theta \rightarrow -\theta \\ \phi \rightarrow -\phi. \end{cases}$$

De plus, les éléments de la métrique sont supposés indépendants du temps.

1. Plus d'informations sur cette métrique et les tenseurs qui s'y rapportent dans l'annexe A.

Afin d'écrire le tenseur d'Einstein puis les équations d'Einstein (1.17), il faut calculer les symboles de Christoffel, le tenseur de Ricci et le tenseur de courbure liés à la métrique (3.1). Ceux-ci sont repris dans l'annexe A. Le système suivant donne l'expression du tenseur d'Einstein :

$$\begin{cases} G_{00} = -e^{2\nu} \left(e^{-2\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \right) \\ G_{11} = e^{2\lambda} \left(e^{-2\lambda} \left(\frac{2\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \right) \\ G_{22} = r^2 e^{-2\lambda} \left(\frac{\nu' - \lambda'}{r} + \nu'' + \nu'^2 - \lambda' \nu' \right) \\ G_{33} = \sin^2 \theta r^2 e^{-2\lambda} \left(\frac{\nu' - \lambda'}{r} + \nu'' + \nu'^2 - \lambda' \nu' \right). \end{cases} \quad (3.2)$$

Les éléments non diagonaux sont nuls.

3.2 La solution extérieure

Par hypothèse, à l'extérieur du corps nous sommes dans le vide. Par conséquent, le membre de droite de l'équation d'Einstein (1.17) est identiquement nul. Le système (3.3) est le système d'équations non redondantes à résoudre pour obtenir la solution extérieure ($\Lambda = 0$). Notons que nous avons deux équations pour trois inconnues. Cela vient du fait que la dernière équation s'obtient à partir des deux premières par l'identité de Bianchi (1.13).

$$\begin{cases} e^{-2\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = 0 \\ e^{-2\lambda} \left(\frac{2\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0 \\ \frac{\nu' - \lambda'}{r} + \nu'' + \nu'^2 - \lambda' \nu' = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

La solution de ce système est donnée par la métrique suivante :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.4)$$

où r_s est le rayon de Schwarzschild tel que $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ avec G est la constante gravitationnelle, c la vitesse de la lumière et M la masse du corps.

Cette métrique décrit la façon dont le corps sphérique déforme l'espace-temps à l'extérieur de ce dernier. Remarquons la singularité de la métrique en $r = r_s$ et en $r = 0$. La singularité en $r = r_s$ est due au système de coordonnées utilisé. Ce n'est pas une véritable pathologie car le scalaire de Kretschmann², le tenseur de Riemann (1.8) ainsi que le déterminant de la métrique sont bien définis en r_s contrairement à $r = 0$ qui est une véritable singularité. Remarquons que le rayon de Schwarzschild dépend uniquement de la masse du corps.

L'espace-temps représenté par cette métrique peut être approximé par un espace de Minkowski lorsque $r \rightarrow \infty$. En effet, dans ce cas la métrique est plate.

2. Le scalaire de Kretschmann est un scalaire quadratique invariant en relativité générale défini comme $K = R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ avec $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ le tenseur de Riemann. Dans notre cas, il est tel que $K = 48 \frac{G^2 M^2}{r^6 c^4}$.

3.3 La solution intérieure

Nous supposons que la matière à l'intérieur du corps se comporte comme un fluide parfait. Le tenseur énergie-impulsion que nous considérons est ($c = 1$) :

$$T_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

où ρ est la densité du corps et P la pression intérieure.

Après simplification, les équations d'Einstein se réécrivent :

$$\begin{cases} e^{-2\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = -\kappa\rho \\ e^{-2\lambda} \left(\frac{2\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = \kappa P \\ e^{-2\lambda} \left(\frac{\nu' - \lambda'}{r} + \nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' \right) = \kappa P \end{cases} \quad (3.5)$$

où $\kappa = 8\pi G$.

La solution de ce système est décrite par la métrique suivante :

$$ds^2 = - \left(\frac{3}{2} \left(1 - \frac{R^2}{\mathfrak{R}^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{\mathfrak{R}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r^2}{\mathfrak{R}^2} \right)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.6)$$

où R est le rayon du corps et $\mathfrak{R}^2 = \frac{R^3}{r_s}$.

3.4 La pression à l'intérieur du corps

À partir des équations d'Einstein, nous pouvons connaître la pression à l'intérieur du corps [28] ($c = 1$),

$$P(r) = \rho_0 \left(\frac{\sqrt{1 - r_s/R} - \sqrt{1 - r_s r^2 / R^3}}{\sqrt{1 - r_s r^2 / R^3} - 3\sqrt{1 - r_s/R}} \right) \quad (3.7)$$

avec ρ_0 la densité du corps supposée constante.

La pression centrale (en $r = 0$) est donnée par :

$$P(r = 0) = \rho_0 \left(\frac{\sqrt{1 - s} - 1}{1 - 3\sqrt{1 - s}} \right) \quad (3.8)$$

où nous avons introduit la notion de compacité s telle que $s = \frac{r_s}{R}$.

La pression au centre devient infinie lorsque $R = \frac{9}{8} r_s$, *i.e.* lorsque le rayon de Schwarzschild vaut $\frac{8}{9}$ du rayon du corps. La FIGURE 3.1 illustre la pression au centre du corps divisé par ρ_0 en fonction de s .

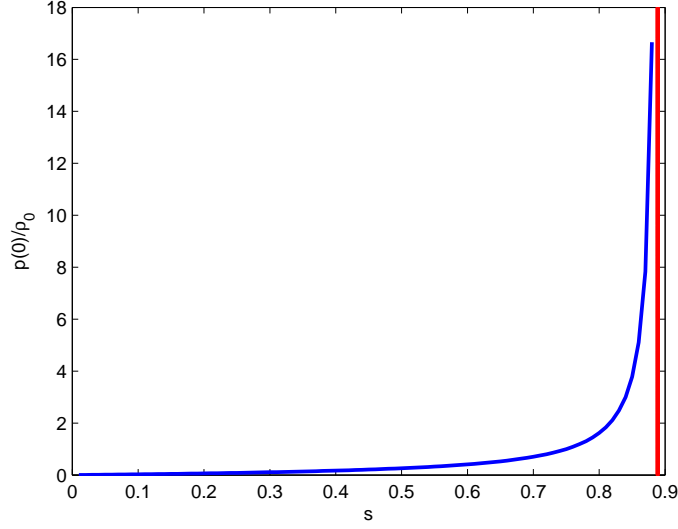


FIGURE 3.1 – Pression au centre du corps en fonction de la compacité.

3.5 L'expression analytique des solutions

Pour rappel, le rayon de Schwarzschild est tel que $r_s = \frac{2GM}{c^2}$, avec M la masse du corps.

Nous définissons s la compacité et u la composante radiale du corps en unité du rayon de Schwarzschild :

$$s = \frac{r_s}{R} \quad \text{et} \quad u = \frac{r}{r_s}. \quad (3.9)$$

Nous pouvons écrire les expressions analytiques des solutions de Schwarzschild en fonction de ces variables :

- A l'intérieur nous avons :

$$e^{2\nu(u)} = \left(\frac{3}{2}\sqrt{1-s} - \frac{1}{2}\sqrt{1-s^3u^2} \right)^2 \Rightarrow \nu(u) = \ln \left(\frac{3}{2}\sqrt{1-s} - \frac{1}{2}\sqrt{1-s^3u^2} \right) \quad (3.10)$$

$$e^{2\lambda(u)} = \left(\frac{1}{1-u^2s^3} \right) \Rightarrow \lambda(u) = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2s^3}} \right). \quad (3.11)$$

- A l'extérieur nous avons :

$$e^{2\nu(u)} = \left(\frac{u-1}{u} \right) \Rightarrow \nu(u) = \ln \left(\sqrt{\frac{u-1}{u}} \right) \quad (3.12)$$

$$e^{2\lambda(u)} = \left(\frac{u}{u-1} \right) \Rightarrow \lambda(u) = \ln \left(\sqrt{\frac{u}{u-1}} \right). \quad (3.13)$$

Remarque : il est évident que nous passons à la solution extérieure lorsque $r \geq R$.

La FIGURE 3.2 est une illustration des solutions ainsi que de la pression en fonction de la composante radiale pour une compacité de 0.1 et un rayon du corps $R = 15r_s$ (échelle semi-logarithmique).

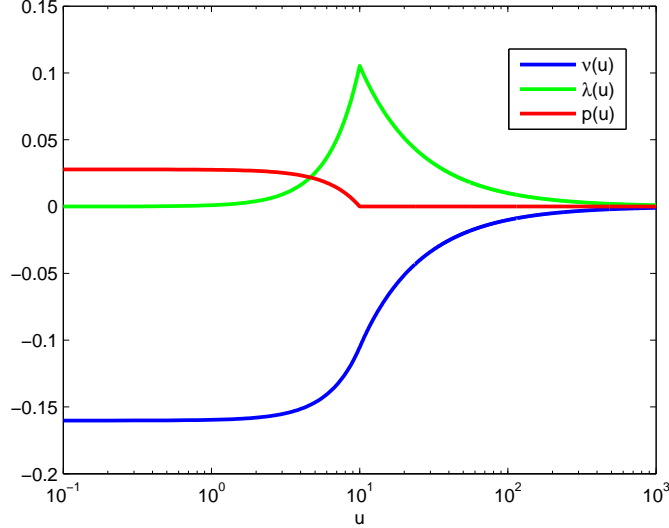


FIGURE 3.2 – Représentation des solutions de Schwarzschild pour $R = 10r_s$ et $s = 0.1$.

3.6 Les équations du champ gravitationnel par principe variationnel

Dans cette section, nous déduisons les équations du champ gravitationnel (équations d'Einstein) dans la géométrie de Schwarzschild par le principe variationnel (cf. chapitre 2). Nous utiliserons aussi cette méthode dans la suite de ce mémoire lorsque nous dériverons les équations du champ gravitationnel et du champ scalaire en gravitation modifiée.

Pour ce faire, nous utilisons la décomposition 3+1 (cf. chapitre 1). Nous utilisons la métrique en coordonnées aréolaires (3.14)³, celle-ci étant la plus adaptée au cas stationnaire et symétrique que nous étudions. Comme précisé au chapitre 2, c'est l'action d'Einstein-Hilbert (2.10) qui décrit l'espace-temps en relativité générale, c'est donc celle-ci que nous utilisons ici.

La métrique en coordonnées aréolaires est :

$$ds^2 = -e^{2\nu(r)} dt^2 + e^{2\lambda(r)} dr^2 + e^{2\mu(r)} d\Omega^2 \quad (3.14)$$

où $d\Omega^2$ est l'angle solide infinitésimal tel que $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$. Par la suite, nous utiliserons la jauge de Schwarzschild ($e^{2\mu(r)} = r^2$) afin de retrouver (3.1).

Pour commencer, calculons le déterminant de cette métrique :

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = -e^{2(\nu+\lambda+2\mu)} \sin^2 \theta. \quad (3.15)$$

3. Plus d'informations sur cette métrique dans l'annexe A.

Il s'en suit que $\sqrt{-g} = e^{\nu+\lambda+2\mu} \sin \theta$.

L'intégrale en 4 dimensions associée à l'action se réduit à une dimension car l'intégration par rapport à t , à θ et à ϕ donnent des constantes qui n'influencent pas la dynamique (cf. symétries de l'espace-temps). Nous traitons alors un lagrangien et une densité lagrangienne à une dimension comme en mécanique classique.

Le lagrangien relatif au problème est le suivant (cf. chapitre 2) :

$$L = \sqrt{-g} \mathcal{R} \quad (3.16)$$

$$= -2 \left[e^{\nu-\lambda+2\mu} (\nu'' + \nu' \{ \nu' - \lambda' + 2\mu' \} + 2\mu'' + 3\mu'^2 - 2\mu' \lambda') - e^{\nu+\lambda} \right]. \quad (3.17)$$

Nous identifions les dérivées totales car elles ne contribuent pas à l'action (voir théorème (2.8)). D'une part, nous avons :

$$\frac{d}{dr} \left(\nu' e^{\nu-\lambda+2\mu} \right) = \frac{d}{dr} \nu' e^{\nu-\lambda+2\mu} + \nu' \frac{d}{dr} \left(e^{\nu-\lambda+2\mu} \right) \quad (3.18)$$

$$= e^{\nu-\lambda+2\mu} (\nu'' + \nu'^2 - \lambda' \nu' + 2\mu' \nu'). \quad (3.19)$$

Et d'autre part :

$$2 \frac{d}{dr} \left(\mu' e^{\nu-\lambda+2\mu} \right) = 2 e^{\nu-\lambda+2\mu} [\mu'' + \mu' (\nu' - \lambda' + 2\mu')]. \quad (3.20)$$

Nous pouvons alors retirer ces expressions ((3.19) et (3.20)) de (3.17) et écrire le lagrangien effectif (le lagrangien avec lequel nous allons travailler par la suite) :

$$L_{eff} = 2e^{\nu-\lambda+2\mu} \mu' (\mu' + 2\nu') + 2e^{\nu+\lambda}. \quad (3.21)$$

Calculons maintenant les équations du champ gravitationnel qui découlent de ce lagrangien effectif.

Commençons par l'équation associée à ν et calculons

$$\frac{\partial L_{eff}}{\partial \nu} = 2e^{\nu-\lambda+2\mu} \mu' (\mu' + 2\nu') + 2e^{\nu+\lambda} \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial L_{eff}}{\partial \nu'} = 4e^{\nu-\lambda+2\mu} \mu' \quad (3.23)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_{eff}}{\partial \nu'} \right) = 4 \left[(\nu' - \lambda' + 2\mu') e^{\nu-\lambda+2\mu} \mu' + e^{\nu-\lambda+2\mu} \mu'' \right]. \quad (3.24)$$

La première équation : $\frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_{eff}}{\partial \nu'} \right) - \frac{\partial L_{eff}}{\partial \nu} = 0$ donne dans notre cas

$$2e^{\nu-\lambda+2\mu} \mu' (\mu' + 2\nu') + 2e^{\nu+\lambda} - 4(\nu' - \lambda' + 2\mu') e^{\nu-\lambda+2\mu} \mu' - 4e^{\nu-\lambda+2\mu} \mu'' = 0. \quad (3.25)$$

En posant $e^{2\mu} = r^2$, nous obtenons :

$$2e^{\nu-\lambda} r \left(\frac{1}{r} + 2\nu' \right) + 2e^{\nu+\lambda} - 4(\nu' - \lambda' + \frac{2}{r}) e^{\nu-\lambda} r + 4e^{\nu-\lambda} = 0 \quad (3.26)$$

En divisant par $2e^{\nu+\lambda}r^2$ et en simplifiant, nous avons

$$-e^{-2\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = 0. \quad (3.27)$$

Passons maintenant à l'équation associée à la variable λ :

$$\frac{\partial L_{eff}}{\partial \lambda} = -2e^{\nu-\lambda+2\mu} \mu' (\mu' + 2\nu') + 2e^{\nu+\lambda} \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial L_{eff}}{\partial \lambda'} = 0. \quad (3.29)$$

La seconde équation du champ gravitationnel : $\frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_{eff}}{\partial \lambda'} \right) - \frac{\partial L_{eff}}{\partial \lambda} = 0$ donne dans notre cas :

$$-2e^{\nu-\lambda+2\mu} \mu' (\mu' + 2\nu') + 2e^{\nu+\lambda} = 0. \quad (3.30)$$

En posant $e^{2\mu} = r^2$ et en divisant par $2e^{\nu+\lambda}r^2$, nous avons :

$$-e^{-2\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2\nu'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = 0. \quad (3.31)$$

La dernière équation, associée à μ :

$$\frac{\partial L_{eff}}{\partial \mu} = 4e^{\nu-\lambda+2\mu} \mu' (\mu' + 2\nu') \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial L_{eff}}{\partial \mu'} = 4e^{\nu-\lambda+2\mu} (\mu' + \nu') \quad (3.33)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_{eff}}{\partial \mu'} \right) = 4(\nu' - \lambda' + 2\mu')(\mu' + \nu')e^{\nu-\lambda+2\mu} + 4e^{\nu-\lambda+2\mu}(\mu'' + \nu''). \quad (3.34)$$

Et l'équation : $\frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_{eff}}{\partial \mu'} \right) - \frac{\partial L_{eff}}{\partial \mu} = 0$ donne dans notre cas :

$$4(\nu' - \lambda' + 2\mu')(\mu' + \nu')e^{\nu-\lambda+2\mu} + 4e^{\nu-\lambda+2\mu}(\mu'' + \nu'') - 4e^{\nu-\lambda+2\mu} \mu' (\mu' + 2\nu') = 0. \quad (3.35)$$

En posant $e^{2\mu} = r^2$ et en divisant par $4e^{\nu-\lambda}r^2$, nous obtenons :

$$\left(\nu' - \lambda' + \frac{2}{r} \right) \left(\frac{1}{r} + \nu' \right) + \left(-\frac{1}{r^2} + \nu'' \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} + 2\nu' \right) = 0. \quad (3.36)$$

En simplifiant, nous avons :

$$\nu'' + \frac{\nu' - \lambda'}{r} + \nu'^2 - \lambda' \nu' = 0. \quad (3.37)$$

Les équations (3.27), (3.31) et (3.37) sont identiques aux 3 équations du système (3.3). Ce sont les 3 équations du champ gravitationnel qui donnent la solution de Schwarzschild extérieure.

Remarque : Nous avons choisi la jauge de Schwarzschild pour exprimer nos équations et retrouver celles présentées en (3.3). Lorsque nous imposons la jauge de Schwarzschild, cela implique que la coordonnée radiale est équivalente au rayon vecteur, *i.e.* le rapport de la circonférence d'un cercle sur 2π .

3.7 Les solutions par intégration numérique

Nous consacrons cette section à l'intégration numérique des équations de Schwarzschild présentées en (3.3) et (3.5). Ces équations sont au nombre de 4 et présentent 4 inconnues (λ , ν , ρ , P) avec ρ la densité de matière et P la pression. Afin de simplifier le problème, nous supposons que la densité de matière est constante à l'intérieur du corps telle que $\rho(r < R) \equiv \rho_0 = \frac{3m_{pl}^2 r_s}{8\pi R^3}$ [23] avec $m_{pl} = 2.176 \times 10^{-8} kg$ la masse de Planck⁴ et $\rho(r > R) = 0$. Nous savons aussi que la pression doit être nulle au bord du corps *i.e.* en $r = R$.

Présenté comme ceci, nous avons un problème aux conditions frontières, avec

$$\nu(0) = 0 \quad (3.38)$$

$$\lambda(0) = 0 \quad (3.39)$$

et

$$P(R) = 0. \quad (3.40)$$

Pour se ramener à un problème aux conditions initiales, nous utilisons l'équation de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (3.41).

$$\frac{dP}{dr} = -\nu'(P + \rho) \quad (3.41)$$

où le prime dénote la dérivée par rapport à r .

Nous supposons que ρ est constante tel que $\rho \equiv \rho_0$ et nous séparons les variables de cette équation pour intégrer :

$$\frac{d(P/\rho_0 + 1)}{dr} = -\nu'(P/\rho_0 + 1) \quad (3.42)$$

\Leftrightarrow

$$\frac{d(P/\rho_0 + 1)}{(P/\rho_0 + 1)} = -\nu' dr \quad (3.43)$$

\Leftrightarrow

$$\frac{P}{\rho_0} = \mathcal{C}e^{-\nu} - 1 \quad (3.44)$$

avec $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$ la constante d'intégration. Pour déterminer \mathcal{C} , nous nous référons à (3.7) et rappelons que $\nu(0) = 0$ pour déduire :

$$\mathcal{C} = \frac{2\sqrt{1-s}}{3\sqrt{1-s}-1}.$$

Puisque nous avons fixé ρ_0 , il ne reste que 2 fonctions à intégrer (ν et λ).

Nous posons $u = r/r_s$ et nous étudions donc le problème de Cauchy suivant :

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = f(x, \vec{y}) \quad (3.45)$$

avec pour condition initiale :

$$\vec{y}(0) = 0.$$

Dans notre cas, $x = u$, $\vec{y} = (\lambda(u) \nu(u))$. La fonction $f(u, \vec{y})$ prend différentes formes suivant que nous nous trouvons à l'intérieur ou à l'extérieur du corps.

4. Plus d'informations sur la masse de Planck dans l'annexe E.

A l'intérieur du corps, nous avons :

$$f(u, \vec{y}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{u} - \frac{e^{2\lambda}}{u} + 3e^{2\lambda}s^3u \\ 3e^{2\lambda}Ps^3u + \frac{e^{2\lambda}}{u} - \frac{1}{u} \end{pmatrix}$$

et à l'extérieur :

$$f(u, \vec{y}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{u} - \frac{e^{2\lambda}}{u} \\ \frac{e^{2\lambda}}{u} - \frac{1}{u} \end{pmatrix}.$$

Ces expressions proviennent de (3.5) et (3.3).

Nous utilisons la fonction **ode45** de Matlab⁵ pour intégrer ces équations. Notons que le point $u = 0$ est une indétermination de la fonction f . Afin de l'éliminer, nous ajoutons à u , lorsque celui-ci est au dénominateur, le plus petit réel en virgule flottante admissible par Matlab. Les indéterminations en $u = 0$ n'en sont plus et l'ajout de ce nombre n'influence pas lorsque u est différent de 0. De plus, pour que les coefficients λ et ν tendent vers 0 à l'infini (et avoir une métrique asymptotiquement plate), nous retirons à ν sa valeur à l'« infini », ce qui ne pose aucun problème puisque f ne dépend que de ν' . La FIGURE 3.3 est une représentation des solutions numériques pour un corps central tel que $R = 15r_s$ et $s = 0.06666$.

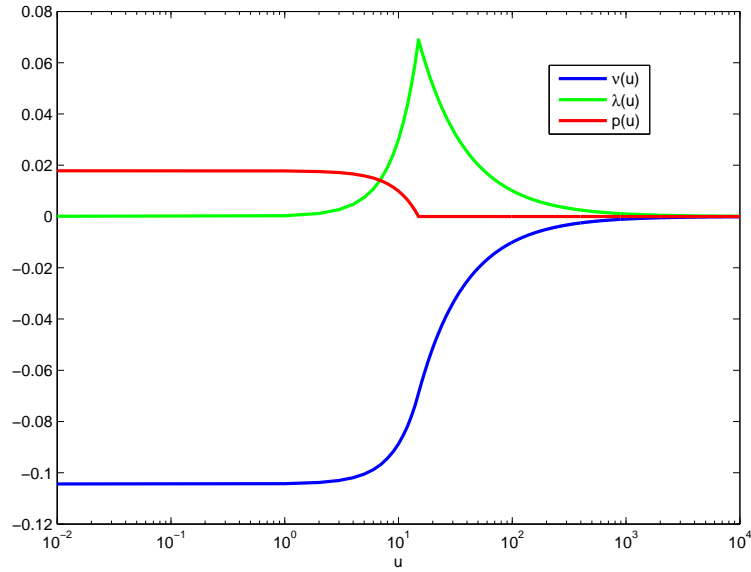


FIGURE 3.3 – Solution de Schwarzschild intégrée numériquement pour $R = 15r_s$ et $s = 0.06666$.

Afin de montrer que les deux méthodes pour obtenir les solutions ν et λ donnent des résultats identiques, nous traçons à la FIGURE 3.4 la différence absolue entre $\lambda(u)$ analytique et $\lambda(u)$ numérique pour un corps central tel que $R = 15r_s$ et $s = 0.06666$. Nous observons que cette différence est constituée de bruit numérique. Ce qui prouve que les deux méthodes apportent les mêmes solutions.

5. Plus d'informations sur ce logiciel et l'intégrateur dans l'annexe D.

Remarque : par soucis de concision, nous ne traçons pas la différence absolue pour $\nu(u)$, mais celle-ci est semblable à celle produite pour $\lambda(u)$.

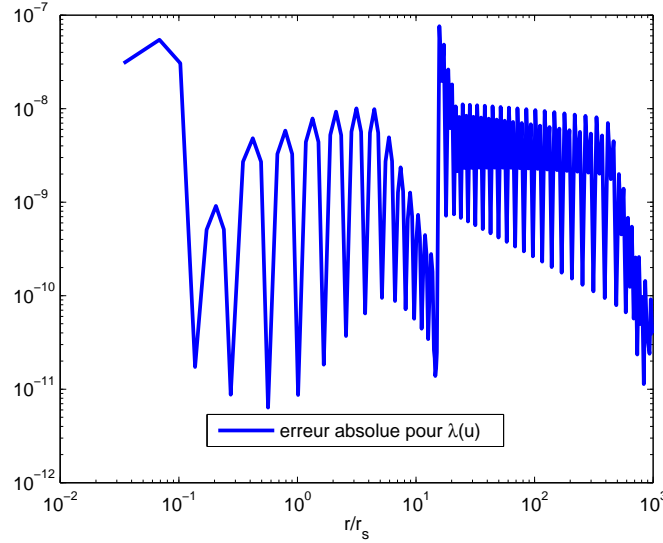


FIGURE 3.4 – Différence absolue entre $\lambda(u)$ analytique et $\lambda(u)$ numérique en géométrie de Schwarzschild pour un corps central tel que $R = 15r_s$ et $s = 0.0666$.

Nous utiliserons cette méthode d'intégration par la suite, lorsque nous intégrerons les équations des champs (obtenues par principe variationnel) en théorie tenseur-scalaire.

3.8 Les masses baryonique et ADM

La masse baryonique

La masse dite baryonique dans notre cas est définie par :

$$M_{bar} = 4\pi \int_0^R \rho r^2 e^{\frac{\lambda(r)}{2}} dr. \quad (3.46)$$

Elle prend en compte les propriétés globales de l'espace (présence du terme $\lambda(r)$).

Nous calculons cette masse en utilisant les mêmes changements de coordonnées que précédemment (3.9), en supposant $r_s = 1$ et que la densité du corps est constante telle que $\rho \equiv \rho_0$. L'équation (3.46) prend la forme suivante :

$$M_{bar} = 4\pi\rho_0 \int_0^{\frac{1}{s}} \frac{u^2}{\sqrt{1-s^3u^2}} du. \quad (3.47)$$

En posant

$$s^3 u^2 = \sin^2 \theta \rightarrow du = \frac{\cos \theta}{\sqrt{s^3}} d\theta$$

l'intégrale devient

$$M_{bar} = \frac{4\pi\rho_0}{s^3} \int_0^{\arcsin \sqrt{s}} \sin^2 \theta d\theta. \quad (3.48)$$

À l'aide de la formule trigonométrique de Carnot, nous pouvons intégrer et obtenons l'expression analytique de la masse baryonique (3.49).

$$M_{bar} = \frac{2\pi\rho_0}{s^3} [\arcsin \sqrt{s} + \sqrt{s}\sqrt{1-s}] \quad (3.49)$$

La FIGURE 3.5 représente la masse baryonique en fonction de s . Nous observons que plus s est grand, plus M_{bar} est petite *i.e.* plus R est petit, plus la masse baryonique est petite (car r_s est constant).

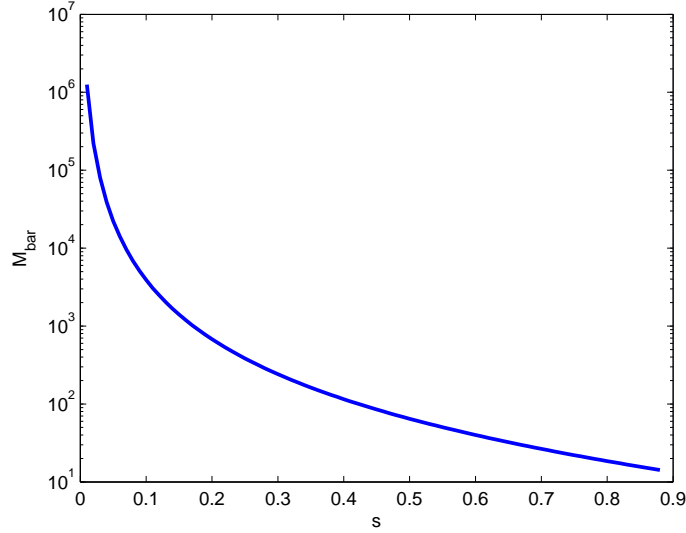


FIGURE 3.5 – Masse baryonique du corps en fonction de la compacité.

La masse ADM

La masse ADM⁶ représente la « charge » gravitationnelle du corps. Elle reprend la masse de l'objet renforcée par la masse produite par le champ gravitationnel. C'est en quelque sorte, une indication sur la façon dont l'espace (courbé par la masse) redevient plat à l'infini.

Nous utilisons (B.14) dans l'annexe B et (3.4) pour écrire (nous supposons que $G = c = 1$)

$$M_{ADM} = \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} - 1 \right) \quad (3.50)$$

avec M la masse du corps.

Puisque

$$\left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} - 1 = \frac{2M}{r \left(1 - \frac{2M}{r} \right)} \quad (3.51)$$

et

$$\frac{r}{2} \left(\left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} - 1 \right) = \frac{M}{1 - \frac{2M}{r}}. \quad (3.52)$$

6. ADM pour Richard Arnowitt, Stanley Deser et Charles Misner les chercheurs qui ont développé ce concept.

Nous pouvons écrire :

$$M_{ADM} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} M. \quad (3.53)$$

Donc la masse ADM en géométrie de Schwarzschild est la masse du corps. Elle peut être approximée par la formule (B.14). Dans la pratique, nous ne pouvons pas aller jusqu'à $r = \infty$ et nous approximations la masse ADM par :

$$\tilde{M}_{ADM} = \frac{1}{2} \bar{R} \left(e^{2\lambda(\bar{R})} - 1 \right) \quad (3.54)$$

avec \bar{R} la plus grande valeur de r pour laquelle nous avons les solutions numériques.

Le coefficient g_{rr} de la métrique peut être réécrit sous la forme (nous avons supposé que $G = c = 1$) :

$$e^{2\lambda(r)} = 1 + \frac{2M_{ADM}}{r}. \quad (3.55)$$

Si nous développons ce terme en série, nous obtenons :

$$e^{2\lambda(r)} \approx 1 + \frac{2M_{ADM}}{r} + \frac{4M_{ADM}^2}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (3.56)$$

Afin d'obtenir une approximation de la masse ADM, nous remplaçons cette expression dans (3.54) et nous écrivons :

$$\tilde{M}_{ADM} = M_{ADM} \left(1 + \frac{r_s}{\bar{R}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\bar{R}^2}\right) \right). \quad (3.57)$$

Il s'en suit que l'erreur décroît en fonction de l'inverse du rayon maximal. Nous pouvons le constater grâce à la FIGURE 3.6 où nous avons représenté $\Delta M/M = (\tilde{M}_{ADM} - M)/M$ avec M la masse du corps, ce que nous appelons erreur relative de la masse ADM. Nous avons aussi représenté ce que nous appelons la variation relative de la masse ADM : $\delta\tilde{M} = (\tilde{M}_{ADM}(\bar{R} + \delta\bar{R}) - \tilde{M}_{ADM}(\bar{R}))/\tilde{M}_{ADM}(\bar{R})$ avec $\delta\bar{R}$ la différence entre deux pas d'intégration. Nous notons \bar{R} la plus grande valeur de r pour laquelle nous avons les solutions durant l'intégration. Nous avons aussi tracé l'évolution de la masse ADM durant l'intégration (FIGURE 3.7). Ces quantités ont été tracées pour un objet central de masse de 100 GeV, de rayon $R = 15r_s$ et de compacité $s = 0.0666$.

La masse ADM en géométrie de Schwarzschild est identique à la masse de l'objet, nous verrons plus tard que ce n'est plus le cas lorsque nous travaillons en théorie tenseur-scalaire.

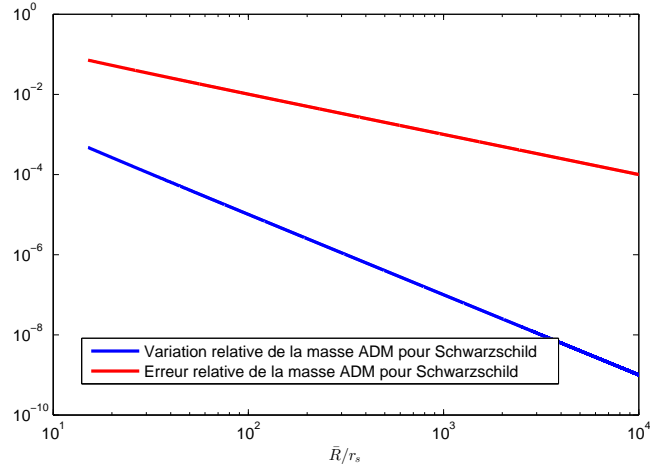


FIGURE 3.6 – Erreur et variation relatives de la masse ADM durant l'intégration.

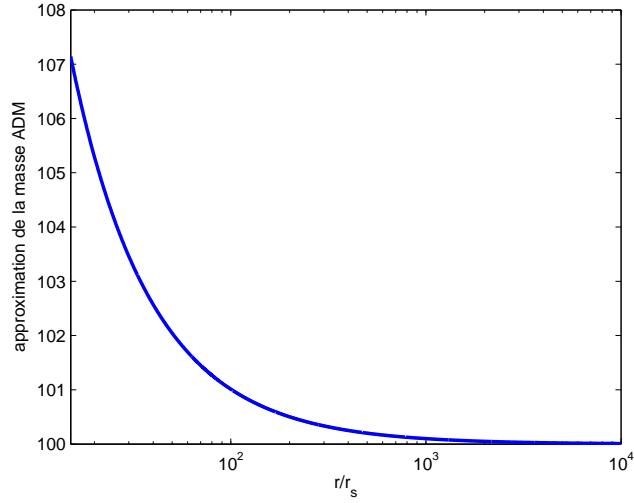


FIGURE 3.7 – Approximation de la masse ADM durant l'intégration

Dans le chapitre suivant, nous étudions les géodésiques dans l'espace-temps de Schwarzschild. D'une part, nous en analysons les propriétés analytiques et d'autre part, nous les traçons à l'aide du logiciel GYOTO.

Chapitre 4

Les géodésiques dans l'espace-temps de Schwarzschild

Ce chapitre est consacré à l'étude des géodésiques dans l'espace-temps de Schwarzschild. Nous commençons par développer les expressions analytiques de ces trajectoires pour des particules massives et nous en étudions les propriétés. Ensuite nous les illustrons en traçant certaines orbites à l'aide de GYOTO ([25] et [26]). Pour finir, nous produisons des simulations de ce que vous pourrions observer si une étoile se trouvait dans l'espace-temps de Schwarzschild (géodésiques de photons).

Pour commencer, nous étudions les trajectoires d'un objet de masse m autour d'un corps central M dans l'espace-temps de Schwarzschild présenté au chapitre 3. Pour rappel, la métrique de Schwarzschild extérieure est :

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\Phi^2 \quad (4.1)$$

avec r_s le rayon de Schwarzschild tel que $r_s = \frac{2GM}{c^2}$.

Nous connaissons les coefficients de connexion qui s'en rapportent (cf. annexe A) ainsi que l'équation des géodésiques (1.7).

4.1 Procédure lagrangienne pour obtenir les géodésiques

Les équations des géodésiques présentées en (1.7) n'étant pas très commodes à écrire, nous utilisons le formalisme lagrangien illustré dans [19] (p. 78) pour déduire ces équations.

Le « lagrangien » que nous utilisons pour déduire les équations des géodésiques est $L = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$. Ce qui donne dans notre cas :

$$L = -c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\Phi}^2\right). \quad (4.2)$$

En supposant que le paramètre affin de la courbe est le temps propre τ , nous pouvons utiliser l'équation d'Euler-Lagrange (2.3) pour écrire l'équation des géodésiques :

$$c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t} = \epsilon \quad (4.3)$$

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \ddot{r} + \frac{r_s c^2}{2r^2} \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-2} \frac{r_s}{2r^2} \dot{r}^2 - r \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\Phi}^2\right) = 0 \quad (4.4)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\Phi}^2 = 0 \quad (4.5)$$

$$r^2 \sin^2 \theta \dot{\Phi} = l \quad (4.6)$$

où le point dénote la dérivée par rapport au temps propre.

Puisque le lagrangien ne dépend pas explicitement de t et de Φ , nous obtenons les constantes ϵ et l dans (4.3) et (4.6). Une solution triviale pour l'équation (4.5) serait $\theta = \frac{\pi}{2}$ et au vu des symétries présentes dans l'espace-temps de Schwarzschild nous pouvons nous contenter d'étudier, sans perte de généralité, les orbites dans le plan équatorial ($\theta = \frac{\pi}{2}$). Il reste alors le système composé des équations (4.3), (4.4) et (4.6). Ce système est valable pour les géodésiques matière. Pour les géodésiques lumière, les équations peuvent s'obtenir de la même manière mais le paramètre affin de la courbe n'est pas le temps propre puisque celui-ci est nul pour de telles géodésiques.

L'équation (4.4) étant assez compliquée, nous la remplaçons par son intégrale première correspondante pour les trajectoires massives (nous ne nous intéressons qu'à ce type de trajectoires pour le moment) :

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -c^2. \quad (4.7)$$

Les constantes ϵ et l apparaissent dans les équations des géodésiques car le lagrangien est indépendant de t et de Φ . Nous pouvons aussi interpréter ces constantes de la manière suivante [19] : pour un observateur au repos à l'infini, ϵ est égal à l'énergie par unité de masse de la particule en orbite et l vaut le moment cinétique de cette particule.

4.2 Les trajectoires des particules massives

Comme précisé plus haut, nous étudions les géodésiques dans le plan équatorial ($\theta = \frac{\pi}{2}$) et nous utilisons (4.7) pour réécrire l'équation (4.4). Le système final avec lequel nous travaillons est le suivant :

$$c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t} = \epsilon \quad (4.8)$$

$$-c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\Phi}^2 = -c^2 \quad (4.9)$$

$$r^2 \dot{\Phi} = l. \quad (4.10)$$

Nous utilisons les expressions (4.8) et (4.10) pour écrire $\dot{t} = \frac{\epsilon}{c^2(1 - r_s/r)}$ et $\dot{\Phi} = \frac{l}{r^2}$ que nous injectons dans (4.9) pour obtenir :

$$-\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \frac{\epsilon^2}{c^2} + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + \frac{l^2}{r^2} = -c^2. \quad (4.11)$$

Nous multiplions par $\frac{1-r_s/r}{2}$ pour écrire :

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) - \frac{c^2 r_s}{2r} = \frac{\epsilon^2 - c^4}{2c^2}. \quad (4.12)$$

Cette équation représente le comportement de l'énergie du système en fonction de r (rappelons que $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ avec M la masse du corps).

Nous définissons le potentiel effectif de la manière suivante :

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}(r) = \frac{\epsilon^2 - c^4}{2c^2}. \quad (4.13)$$

Nous pouvons alors tirer l'expression de $V_{eff}(r)$ dans notre cas :

$$V_{eff}(r) = \frac{l^2}{2r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) - \frac{c^2 r_s}{2r}. \quad (4.14)$$

4.3 Les mouvements circulaires

Commençons par discuter de la stabilité des orbites. Pour ce faire, nous étudions le potentiel effectif du système. Rappelons que le potentiel effectif dans notre cas est donné par :

$$V_{eff}(r) = \frac{l^2}{2r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) - \frac{c^2 r_s}{2r}. \quad (4.15)$$

Pour plus de facilité, nous posons $\bar{l} = \frac{l}{cr_s}$. Le potentiel effectif se ré-écrit :

$$V_{eff}(r) = \frac{c^2}{2} \left(-\frac{r_s}{r} + \bar{l}^2 \frac{r_s^2}{r^2} - \bar{l}^2 \frac{r_s^3}{r^3} \right) \quad (4.16)$$

La FIGURE 4.1 représente le potentiel effectif divisé par c^2 en fonction de $\frac{r}{r_s}$. Les minima locaux des potentiels correspondent aux orbites circulaires stables et les maxima locaux aux orbites circulaires instables. Pour rappel, nous avons posé $\bar{l} = \frac{l}{r_s c}$.

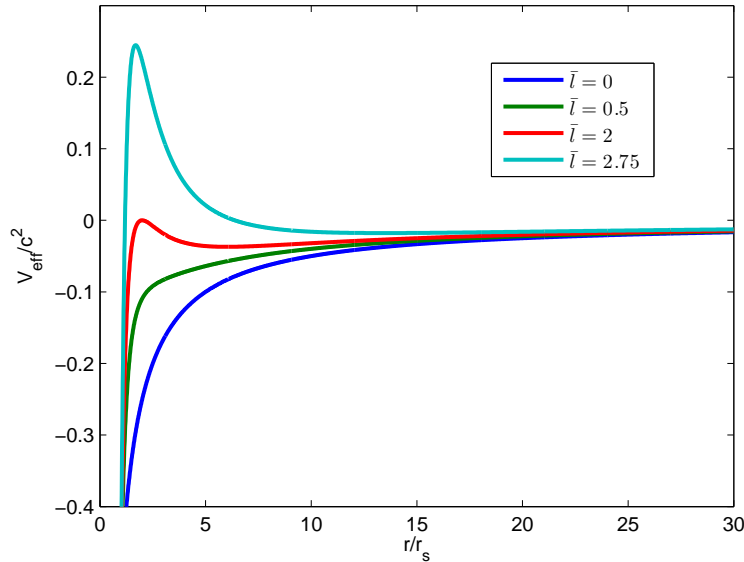


FIGURE 4.1 – Représentation du potentiel effectif du système pour plusieurs \bar{l} .

Nous pouvons écrire l'expression analytique de ces extrema en annulant la dérivée du potentiel (nous l'écrivons en fonction de $\bar{l} = \frac{l}{cr_s}$) :

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = \frac{c^2 r_s}{2r^2} \left(1 - 2\bar{l}^2 \frac{r_s}{r} + 3\bar{l} \frac{r_s^2}{r^2} \right) = 0 \quad (4.17)$$

\Leftrightarrow

$$1 - 2\bar{l}^2 \frac{r_s}{r} + 3\bar{l} \frac{r_s^2}{r^2} = 0 \quad (4.18)$$

ou

$$\frac{r^2}{r_s^2} - 2\bar{l}^2 \frac{r}{r_s} + 3\bar{l}^2 = 0. \quad (4.19)$$

Nous calculons le discriminant de cette équation du second degré :

$$\Delta = 4\bar{l}^4 - 12\bar{l}^2.$$

Celui-ci doit être positif ou nul pour que l'équation admette une ou plusieurs solutions. Nous n'avons qu'un seul extremum lorsque $\bar{l} = 0$ ou $\bar{l} = \sqrt{3}$ et nous en avons deux lorsque : $4\bar{l}^4 - 12\bar{l}^2 > 0$. Ces 2 extrema sont de la forme suivante :

$$\frac{r}{r_s} = \bar{l}^2 \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{\bar{l}^2}} \right]. \quad (4.20)$$

La plus petite orbite circulaire est $\frac{r}{r_s} = \bar{l}^2 \left[1 + \sqrt{1 - \frac{3}{\bar{l}^2}} \right]$. C'est à cette orbite que nous nous intéressons. Nous calculons la valeur de Ω , la vitesse orbitale de la particule mesurée par un observateur statique à l'infini, pour que son orbite soit circulaire et stable ([15] p.79). Pour ce faire, nous supposons que le corps en orbite émet un photon dans la direction radiale depuis le point $(t_1, r_1, \frac{\pi}{2}, \Phi_1)$. Ce photon parvient à l'observateur statique situé en $(t'_1, r'_1, \frac{\pi}{2}, \Phi'_1)$ où nous avons supposé que $r'_1 \gg r_1$ et $\Phi'_1 = \Phi_1$ puisqu'il suit une géodésique circulaire. Nous supposons que le corps émet un second photon en direction de l'observateur lorsqu'il a fait un tour complet de son orbite. Ces coordonnées sont $(t_2, r_2, \frac{\pi}{2}, \Phi_1 + 2\pi)$. Puisque le photon se situe sur la même orbite, nous avons :

$$t_2 = t_1 + 2\pi \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)^{-1}. \quad (4.21)$$

Soient les coordonnées de réception du second photon : $(t'_2, r'_2, \frac{\pi}{2}, \Phi_1)$. Nous utilisons les propriétés de stationnarité de l'espace-temps de Schwarzschild pour écrire :

$$t'_2 - t'_1 = t_2 - t_1.$$

De plus, puisque l'observateur se trouve à l'infini, il est dans la région plate de l'espace-temps et son temps propre est donné par la coordonnée t de la métrique de Schwarzschild. Nous avons donc :

$$\Omega = \frac{2\pi}{t'_2 - t'_1} = \frac{2\pi}{t_2 - t_1} \quad (4.22)$$

et par la relation (4.21), nous pouvons conclure que

$$\Omega = \frac{2\pi}{2\pi \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)^{-1}} = \frac{d\Phi}{dt}. \quad (4.23)$$

Nous utilisons alors les expressions de ϵ et l ((4.3) et (4.6)) pour écrire :

$$\epsilon = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \frac{\epsilon}{c^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \quad (4.24)$$

$$l = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\Phi}{d\tau} \Rightarrow \frac{d\Phi}{d\tau} = \frac{l}{r^2} \quad (4.25)$$

car $\theta = \frac{\pi}{2}$. Il est alors simple de calculer $\Omega = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}$:

$$\Omega = \frac{l}{\epsilon} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{c^2}{r^2}. \quad (4.26)$$

Nous utilisons le fait que $dr/d\tau = 0$ (car une orbite circulaire a un rayon qui ne varie pas) pour dire (4.12) $V_{eff} = \frac{\epsilon^2 - c^4}{2c^2}$.

Nous pouvons alors écrire $\frac{l}{\epsilon}$ en fonction de r en nous référant à l'expression (4.15) :

$$\frac{\epsilon^2}{\bar{l}^2} = c^4 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(\frac{1}{\bar{l}^2} + \frac{r_s^2}{r^2}\right). \quad (4.27)$$

Puisque

$$\frac{r}{r_s} = \bar{l}^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{3}{\bar{l}^2}}\right), \quad (4.28)$$

nous pouvons écrire :

$$\frac{r_s}{r} = \frac{1}{3} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3}{\bar{l}^2}}\right) \quad (4.29)$$

et en déduire que

$$\left(\frac{r_s}{r}\right)^2 = \frac{1}{3} \left(2\frac{r_s}{r} - \frac{1}{\bar{l}^2}\right). \quad (4.30)$$

On peut alors en tirer la valeur de $\frac{1}{\bar{l}^2}$:

$$\frac{1}{\bar{l}^2} = -3\frac{r_s^2}{r^2} + 2\frac{r_s}{r}. \quad (4.31)$$

Il s'en suit que $\frac{\epsilon^2}{\bar{l}^2} = 2c^4 \frac{r_s}{r} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2$ et puisque $\bar{l} = \frac{l}{r_s c}$, nous avons

$$\frac{l}{\epsilon} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{r r_s}{2}} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}. \quad (4.32)$$

Nous déduisons alors :

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}. \quad (4.33)$$

Notons que la dernière orbite circulaire stable correspond au cas où (4.18) admet une seule racine *i.e.* lorsque $l = \sqrt{3}cr_s$ ou $\bar{l} = \sqrt{3}$. Dans ce cas, $r = 3r_s = \frac{6GM}{c^2}$ et $\Omega = \frac{c^3}{6^{3/2}GM}$.

La FIGURE 4.2 représente des orbites circulaires stables projetées dans le plan cartésien pour la solution de Schwarzschild autour d'un corps central dont le rayon vaut $5r_s$. Nous observons que la dernière orbite circulaire stable se trouve en $r = 5r_s$ (et donc sur le corps). Nous ne pouvons pas tracer la plus petite orbite circulaire stable car celle-ci se trouverait dans le corps.

Remarque : les rayons initiaux pour les orbites ont été choisis de manière aléatoire et les orbites ont été calculées avec GYOTO ([25] et [26]).

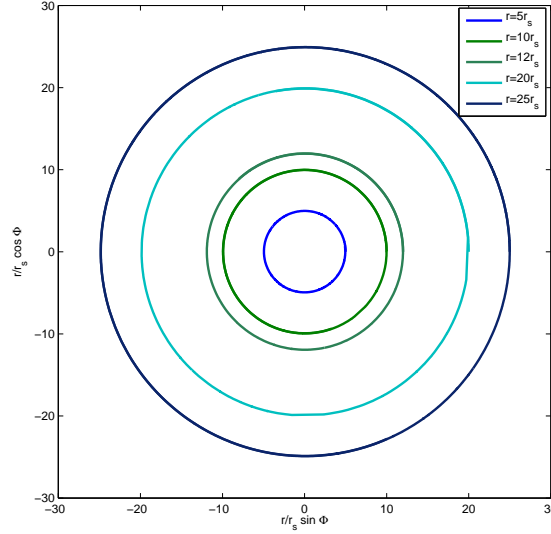


FIGURE 4.2 – Illustrations d'orbites circulaires stables en géométrie de Schwarzschild.

4.4 Les rosaces

Nous avons vu dans la section précédente qu'il existe deux solutions à l'équation (4.18) *ssi* $|l| > l_{critique} = \sqrt{3}cr_s$. Dans ce cas, le potentiel effectif a une forme de puits et admet donc un minimum. De plus, si le membre de droite de l'équation (4.12) est négatif, cela nous assure que la particule reste dans le puits de potentiel, l'orbite est liée. La particule piégée dans le puits de potentiel varie entre deux points appelés périastre¹ (dont le rayon au corps central est noté r_p) et apoastre² (dont le rayon au corps central est noté r_a). Les valeurs de r_p et r_a sont obtenues en posant $\dot{r} = 0$ dans (4.12). Nous pouvons utiliser le même procédé que pour l'équation (4.27) pour écrire :

$$\frac{\epsilon^2}{c^4} = \left(1 - \frac{r_s}{r_*}\right) \left(1 + \bar{l}^2 \frac{r_s^2}{r_*^2}\right). \quad (4.34)$$

où r^* désigne le rayon propre à l'apoastre ou au périastre. Les expressions de r_a et r_p s'obtiennent alors en calculant les racines de l'équation (4.34).

Nous avons aussi ([15] p.80) :

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm \sqrt{\frac{\epsilon}{c^2} - c^2 - 2V_{eff}} \quad (4.35)$$

$$= \pm c \sqrt{\frac{\epsilon^2}{c^4} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(1 + \bar{l}^2 \frac{r_s^2}{r^2}\right)}. \quad (4.36)$$

Par l'équation (4.10) et en supposant que $\theta = \frac{\pi}{2}$, nous avons :

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = \frac{l}{r^2}. \quad (4.37)$$

1. Le périastre est le point de la trajectoire où le corps est le plus proche de celui autour duquel il orbite.
2. L'apoastre est le point de la trajectoire où le corps est le plus éloigné de celui autour duquel il orbite.

En combinant les équations, nous pouvons écrire :

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{d\Phi}{d\tau} \frac{d\tau}{dr} \quad (4.38)$$

$$= \pm \frac{h}{cr^2 \sqrt{\frac{l^2}{c^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(1 + \bar{l}^2 \frac{r_s^2}{r^2}\right)}}, \quad (4.39)$$

cette équation décrit la variation de Φ pour une orbite en forme de rosace.

La FIGURE 4.3 est la représentation d'une orbite en forme de rosace projetée dans le plan cartésien en géométrie de Schwarzschild calculée avec GYOTO. le corps central a une compacité de 0.5, le corps en orbite a une distance initiale au corps central de $20r_s$ et $\Omega = 0.006199r_s^{-1}$ (pour les unités voir l'annexe E). Le rayon du corps central est tracé en rouge sur la figure et les pointillés bleus forment le cercle dans lequel l'orbite varie et ne sort jamais.

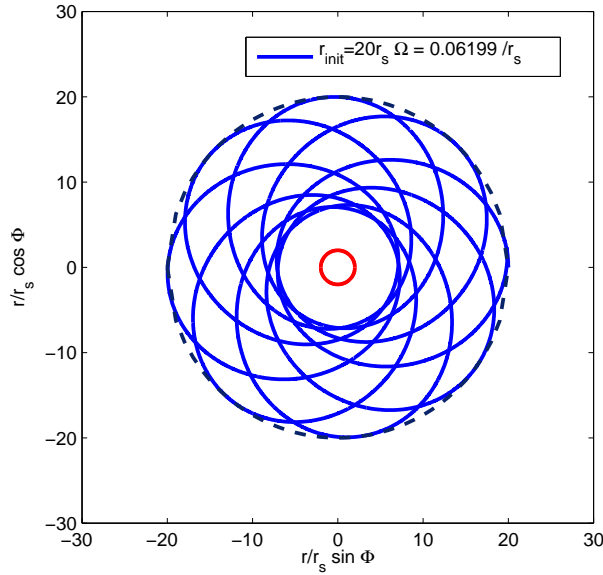


FIGURE 4.3 – Orbite en forme de rosace en géométrie de Schwarzschild.

Remarquons l'avance du périastre (dont nous parlons dans la section suivante). Les planètes suivent également de telles géodésiques dont la théorie de la relativité générale avait prédit la précession du périhélie (p.ex. celle de Mercure).

4.5 L'avance du périastre

Nous savons que lorsque nous travaillons en relativité générale, les orbites des corps ne sont plus des ellipses, ni toujours des courbes fermées. Nous pouvons en rendre compte en intégrant (4.39) entre deux passages au périastre ([15] p.81). La variation de l'angle Φ est telle que :

$$\Delta\Phi = \frac{2l}{c} \int_{r_p}^{r_a} \frac{1}{r^2 \sqrt{\frac{\epsilon^2}{c^4} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(1 + \bar{l}^2 \frac{r_s^2}{r^2}\right)}} dr. \quad (4.40)$$

Si bien que l'avance du périastre est définie par

$$\delta\Phi_{per} = \Delta\Phi - 2\pi \quad (4.41)$$

donne dans notre cas

$$\delta\Phi_{per} = \frac{2l}{c} \int_{r_p}^{r_a} \frac{1}{r^2 \sqrt{\frac{\epsilon^2}{c^4} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(1 + \bar{l}^2 \frac{r_s^2}{r^2}\right)}} dr - 2\pi. \quad (4.42)$$

Si nous développons au premier ordre les termes $\frac{r_s}{r}$, nous obtenons la formule suivante :

$$\delta\Phi_{per} = 6\pi \left(\frac{GM}{cl} \right)^2. \quad (4.43)$$

Les FIGURES 4.4 et 4.5 sont la représentation de l'orbite d'une étoile dans l'espace-temps de Schwarzschild projetée dans le plan cartésien pour un corps central de compacité de 0.5, un rayon initial de l'orbite de $10.79r_s$ et $\Omega = 0.016664r_s^{-1}$. La FIGURE 4.5 met en évidence l'avance du périastre $\delta\Phi = 7.88^\circ$. Le rayon du corps est tracé en rouge sur les figures et les pointillés en bleu foncé délimitent le cercle dans lequel l'orbite varie et ne sort jamais.

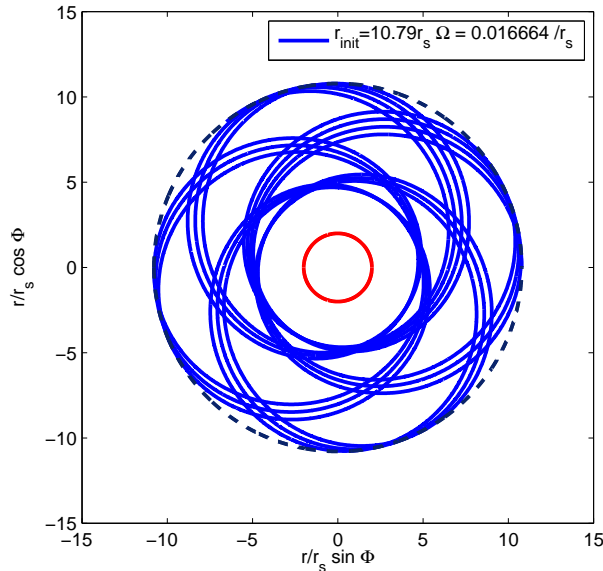


FIGURE 4.4 – Orbite en forme de rosace en géométrie de Schwarzschild.

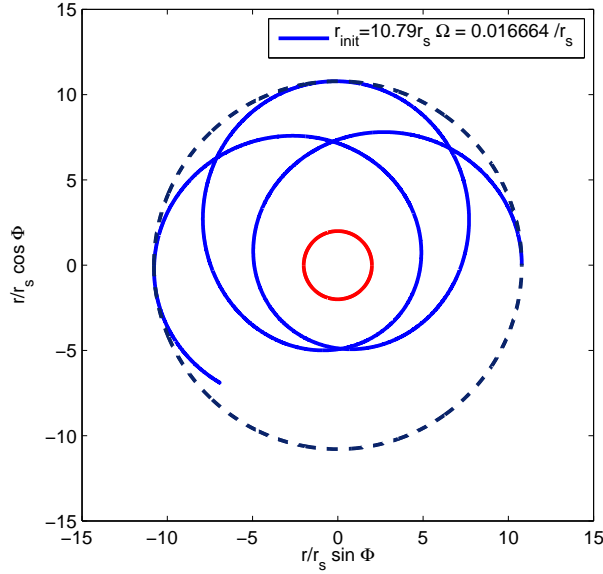


FIGURE 4.5 – Mis en évidence de l’avance du périastre.

4.6 Les géodésiques lumières

Nous introduisons ici la notion de géodésique lumière *i.e.* les géodésiques suivies par les photons. Au lieu d’en étudier les propriétés analytiques comme pour les orbites matérielles et ensuite de proposer des applications à travers le logiciel GYOTO, nous montrons directement les applications (pour la théorie, voir [15]). Avec ce logiciel, nous pouvons créer des « images », des simulations de ce que nous verrions si nous observions une étoile dans un espace-temps donné. Comme précédemment, nous importons une métrique numérique dans GYOTO et il intègre les géodésiques. Pour rendre compte de la courbure de l’espace-temps en géométrie de Schwarzschild, nous avons créé une métrique autour d’un corps dont la masse³ est 8×10^{36} kg et de rayon $5r_s$. Ensuite, nous avons placé (à l’aide de GYOTO) une étoile de rayon $0.5r_s$ derrière le corps central à une distance de $15r_s$ de ce dernier. La FIGURE 4.6 représente ce que nous verrions en observant cette scène⁴. Cette image met en évidence la courbure de l’espace-temps ainsi que ce qui est appelé un effet de lentille gravitationnelle : les rayons lumineux sont déviés par la présence du corps central car il déforme l’espace-temps. C’est pour cela que nous observons un cercle lumineux composé en réalité des photons émis par l’étoile et qui sont déviés par le corps central. Ce cercle est appelé anneau d’Einstein. Si l’espace-temps n’était pas déformé, les photons émis par l’étoile ne nous atteindraient pas étant donné que le corps central a un rayon plus grand que l’étoile.

3. Cette masse est celle du trou noir central de la galaxie. Nous avons choisi cette masse pour créer un espace-temps autour d’un objet existant réellement et dont nous connaissons la masse et la compacité. Ceci dans le but de créer quelque chose de plus réaliste.

4. Il est évident qu’au niveau des unités et de la description de la scène, nous n’avons pas cité tous les éléments ni tous les paramètres. Nous n’entrons pas dans les détails par soucis de concision.

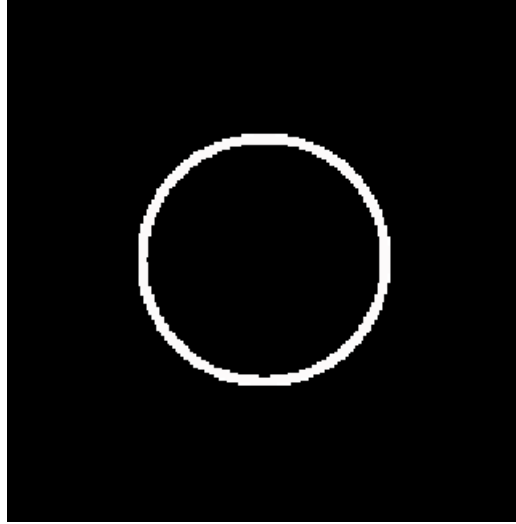


FIGURE 4.6 – Mise en évidence des effets de lentille gravitationnelle avec un anneau d'Einstein en géométrie de Schwarzschild.

Nous pouvons aussi mettre en évidence les effets de lentille en plaçant une étoile de rayon $5r_s$ à gauche et un peu derrière l'objet central et à une distance de $10r_s$. La FIGURE 4.7 représente ce que nous verrions si nous observions cette scène.

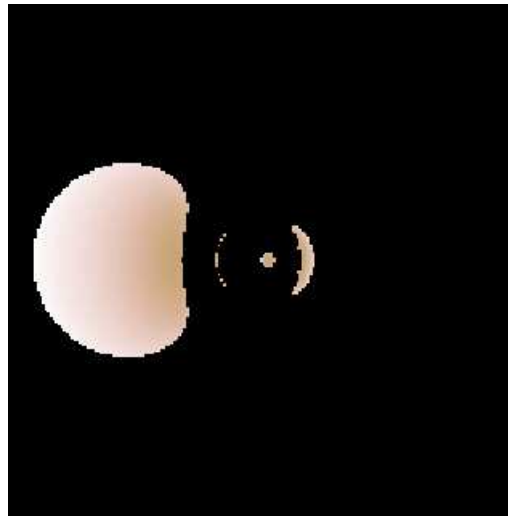


FIGURE 4.7 – Mise en évidence des effets de lentille gravitationnelle dans l'espace-temps de Schwarzschild.

Sur cette figure, il y a une image primaire (à gauche) et une image secondaire (à droite). Au milieu nous observons des petites « taches », cela vient du fait que la métrique numérique que nous avons définie ne tient pas compte du rayon du corps. Il est transparent et laisse passer les photons à travers lui. Pour bien faire, il faudrait apprendre à indiquer le rayon de l'étoile dans l'intégrateur GYOTO.

La FIGURE 4.8 représente un anneau d'Einstein réellement vu par le télescope Hubble. Sur cette image, nous observons deux galaxies qui se déforment mutuellement [35].

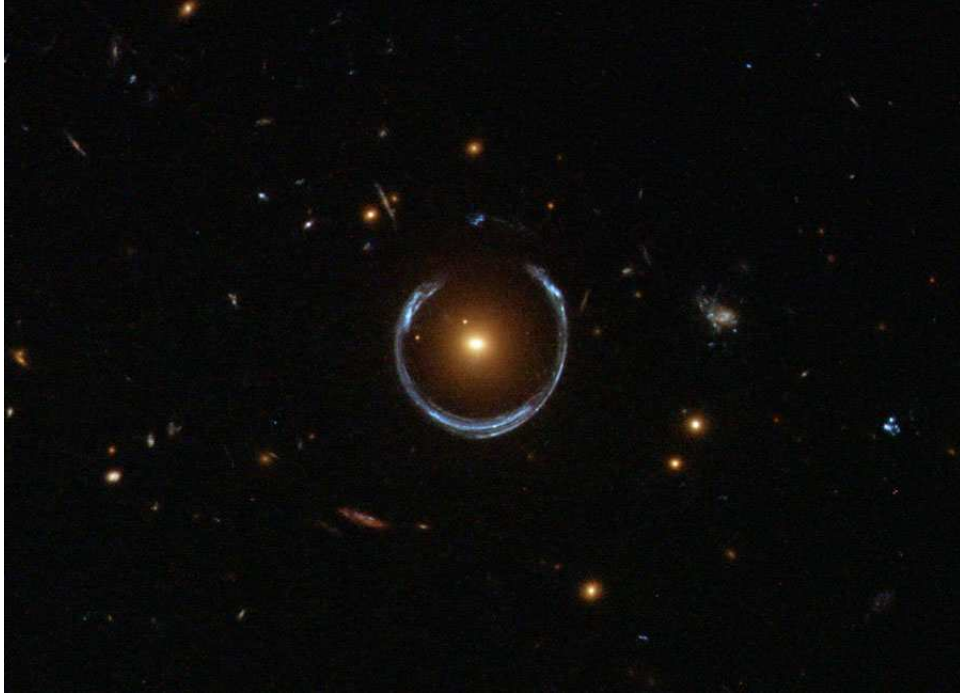


FIGURE 4.8 – Effet de lentille gravitationnelle observé par le télescope Hubble [35].

La partie suivante est consacrée à la gravitation modifiée. Nous nous intéressons particulièrement à aux théories tenseur-scalaire de la gravitation. Nous commençons par introduire ces théories, nous mettons en avant leurs utilités, leurs propriétés, etc. Nous introduisons aussi la notion de champ de Higgs et nous présentons un modèle de théorie tenseur-scalaire qui prend en compte ce champ. Pour ce faire, nous reproduisons les résultats de [11]. Nous partons du lagrangien donné pour écrire les équations du champ gravitationnel et du champ de Higgs. Nous les intégrons numériquement et nous introduisons le concept de monopoles de Higgs. Nous examinons la différence entre les solutions de ce modèle et celles de Schwarzschild. Ensuite, nous cherchons à adapter ce modèle à un « monopole » de masse semblable à celle du trou noir central de la galaxie pour en construire un début d'alternative. A travers les géodésiques, nous comparons la solution de ce modèle à la solution de Schwarzschild pour une même masse ADM et nous mettons en évidence l'influence du champ de Higgs. Pour que cette alternative soit plus réaliste, nous devrions y inclure la rotation. Ce qui nous mène au dernier chapitre de ce mémoire dans lequel nous traitons les équations des champs pour les monopoles de Higgs en rotation.

Troisième partie

La gravitation modifiée

Chapitre 5

Contexte

Dans ce chapitre, nous introduisons les concepts sous-tendus par le modèle standard de la physique des particules ainsi que la notion de champ de Higgs. Ensuite, nous parlons brièvement des principes élémentaires des théories tenseur-scalaire de la gravitation. Nous expliquons en quoi elles sont différentes de la théorie de la relativité générale et en quoi elles peuvent être utiles. Nous introduisons le modèle qui engendre les monopoles de Higgs. Et pour finir, nous définissons la notion de trou noir.

Ce chapitre constitue une introduction physique aux chapitres qui vont suivre. Nous avons tout regroupé ici dans le but de ne pas alourdir la suite du travail.

5.1 Le modèle standard de la physique des particules

Le modèle standard de la physique des particules explique la façon dont les particules et leurs interactions agissent [31]. Élaboré en 1970, c'est le modèle qui a permis d'établir que 3 des 4 interactions fondamentales de la nature (interaction forte, faible et électromagnétique) peuvent être modélisée par une seule théorie de jauge. En effet, elles résultent de l'échange de médiateurs d'interaction (bosons de jauge). Chacune d'entre elles a son boson correspondant ; le gluon transporte l'interaction forte, le photon transporte l'interaction électromagnétique et les bosons W et Z transportent l'interaction faible. Le graviton serait la particule qui véhiculerait la gravitation, mais il n'a pas encore été observé. A l'heure actuelle, le modèle standard explique et prédit tous les phénomènes observables à l'échelle des particules. Pour résumer, cette théorie prend en compte toutes les particules ainsi que 3 des 4 interactions fondamentales. Seule la force de gravitation résiste à cette théorie. Cette force est à part car elle est reliée à la forme de l'espace-temps. Le modèle standard repose sur une théorie quantique relativiste, dans le sens où il unifie mécanique quantique et relativité restreinte. Une des prédictions du modèle standard est l'existence du boson de Higgs. Pour avoir une théorie quantique de la gravitation, nous devrions unifier la mécanique quantique et la relativité générale.

5.2 Le champ et les bosons de Higgs

Nous connaissons à ce jour 25 particules élémentaires (6 quarks, 6 leptons, 8 gluons, 3 bosons intermédiaires, le photon et le boson de Higgs), celles-ci sont classées en 2 catégories : les fermions et les bosons (voir FIGURE 5.1). Les fermions sont les particules qui permettent de constituer la matière. Les bosons quant à eux jouent le rôle de médiateurs des interactions. En effet, lorsqu'une interaction s'exerce entre deux particules de matière, cela se produit par l'intermédi-

aire des bosons. Le boson de Higgs est une particule à part dans le sens où ce n'est pas un boson de jauge, il n'est pas médiateur de force. On dit que c'est un boson scalaire. Il est décrit par un champ scalaire alors qu'un boson de jauge est décrit par un champ vectoriel.

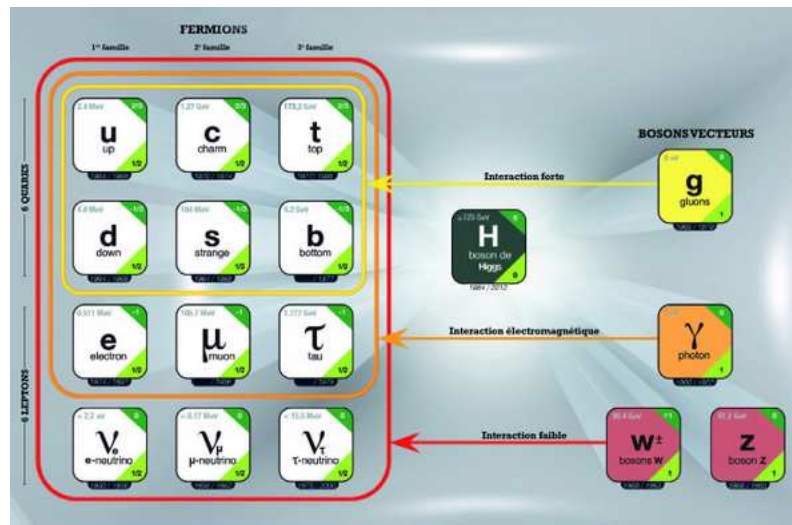


FIGURE 5.1 – Les particules du modèles standard [34].

Passons maintenant à la notion de champ de Higgs ; c'est un champ scalaire dont le potentiel a une valeur minimale non nulle, ce qui implique qu'à l'occasion de l'expansion de l'univers, ce champ tende vers une valeur constante : la valeur moyenne dans le vide du champ de Higgs (*vev* pour vacuum expectation value). Lorsque les 2 interactions (faible et électromagnétique) étaient encore unifiées, le champ de Higgs était nul. Et puis, lorsque l'univers a commencé à se refroidir et que la température est descendue en dessous d'une certaine valeur, il a pris spontanément la valeur de la *vev* et les particules interagissant avec lui ont acquis une certaine masse. L'interaction d'une particule avec ce champ détermine sa masse. Plus une particule interagit avec, plus elle est massive. Par exemple, les photons n'interagissent pas du tout avec ce champ, ils sont dès lors dépourvus de toute masse. Le mécanisme de Brout-Englert-Higgs permet d'expliquer l'origine des masses des particules élémentaires à partir du champ de Higgs. Pour finir, tout comme le photon est associé au champ électromagnétique, le boson de Higgs est associé au champ de Higgs, c'est une manifestation visible de ce champ. Prédit par le modèle de Brout-Englert-Higgs, son existence a été confirmée par les résultats d'expériences menées au CERN en juillet 2012.

5.3 Les théories tenseur-scalaire de la gravitation

L'idée principale des théories tenseur-scalaire est d'ajouter un champ scalaire pour décrire la courbure de l'espace-temps. La métrique $g_{\mu\nu}$ n'est alors plus la seule à décrire les effets de la gravitation. La structure des théories tenseur-scalaire est plus complexe que celle de la relativité générale mais elles constituent une alternative possible à cette dernière. Notons que ces théories violent au moins un des principes d'équivalence (voir chapitre 1).

La théorie de Brans-Dicke

La théorie de Brans-Dicke est l'exemple le plus connu des théories tenseur-scalaire de la gravitation. Celui-ci n'est pas compatible avec le principe d'équivalence fort ce qui implique que l'interaction gravitationnelle ne se propage pas selon l'action d'Einstein-Hilbert (2.10). Dans cette théorie, la gravitation est non seulement décrite par le tenseur de métrique $g_{\mu\nu}$ (comme en relativité générale) mais aussi par une autre quantité : un champ scalaire. Contrairement à la théorie de la relativité générale, Brans et Dicke ont supposé, pour construire leur théorie, que la constante de Newton G n'était pas constante et que son intensité était déterminée par un champ scalaire Φ . « *Un champ scalaire Φ qui détermine l'intensité du couplage entre la matière et le champ scalaire de gravitation.* » [3].

L'action correspondant à ce modèle est la suivante :

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\Phi \mathcal{R} - \frac{\omega}{\Phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi \right) + S_m \quad (5.1)$$

avec ω la constante de couplage, Φ le champ scalaire, \mathcal{R} le scalaire de courbure et S_m la partie de l'action relative à la matière.

La théorie de la relativité générale est élégante par sa simplicité, mais elle n'est pas unique.

Depuis la découverte de l'accélération de l'expansion cosmique, le statut des théories tenseur-scalaire a bien changé [10]. Elles sont passées d'idées purement théoriques à une clarification concrète de ce que la relativité générale n'explique pas. Notons que les théories tenseur-scalaire sont des théories « dangereuses », dans le sens où certains phénomènes sont très sensibles à de petites variations de la relativité générale (par exemple les tests locaux dans le système solaire).

5.4 Les monopoles de Higgs

Les monopoles de Higgs sont le sujet du prochain chapitre et sont un des sujets principaux de ce mémoire. Comme précisé dans la section 5.2, le champ de Higgs dont la particule associée est le boson de Higgs est un champ qui interagit avec les particules élémentaires pour leur donner une masse (selon le mécanisme de Brout-Englert-Higgs). On peut aussi associer le champ de Higgs à la gravité dans un modèle de théorie tenseur-scalaire. Une démarche intéressante est celle qui consiste à identifier le champ scalaire responsable de l'inflation au champ de Higgs non minimalement couplé à la gravité. Ce modèle est simple et il permet d'expliquer l'ère inflationnaire sans rien d'autre que le paramètre de couplage ([10] et [2]). C'est un nouveau modèle d'inflation primordiale appelé « New Higgs inflation ». Les monopoles de Higgs sont issus de cette application. Ce sont en réalité des solutions de type particule, à symétrie sphérique, non singulières et asymptotiquement plates que l'on trouve lorsque le champ de Higgs est non minimalement couplé à la gravité [11]. Ces monopoles sont plus petits qu'un atome et pourraient avoir la même masse qu'un petit astéroïde [6]. La présence de ces monopoles aide à découvrir comment se comporte le champ de Higgs en présence de matière, comment il se propage autour d'objets compacts tels que les étoiles, les trous noirs, etc. L'existence de ces monopoles n'est pas compatible avec la relativité générale (car la seule solution possible en relativité générale pour le champ de Higgs est un champ constant). Cela n'a pas encore été prouvé mais s'ils existaient, cela signifierait que la relativité générale ne décrit pas complètement la gravitation.

5.5 Les trous noirs

Dans cette section, nous abordons les trous noirs. Notons que nous n'avons aucune certitude quant à l'existence de tels objets mais nous avons des preuves convaincantes que les trous noirs sont la meilleure explication à certaines observations.

Les trous noirs sont d'abord apparus en relativité générale comme solution des équations d'Einstein. La définition la plus courante qu'on leur donne est la suivante [17] : « Un trou noir est défini comme une région de l'espace-temps d'où les photons ne peuvent sortir pour atteindre des régions infiniment éloignées, où la gravitation est très faible. ». Les trous noirs se divisent en 2 catégories : les trous noirs de masse stellaire et les trous noirs super massifs. Comme leurs noms l'indiquent ces deux catégories sont basées sur la masse (obtenue par observations). La première catégorie reprend les trous noirs de masse de l'ordre de $10 M_{\odot}$ ¹. La seconde catégorie reprend les trous noirs qui ont une masse de l'ordre de $10^6 - 10^9 M_{\odot}$ [1]. C'est à la seconde partie que nous nous intéressons car c'est dans celle-là qu'est classé Sagittarius A*, l'objet central de notre galaxie. Cet objet est le sujet d'un des prochains chapitres. L'observation du centre galactique a révélé que plusieurs étoiles orbitaient autour d'un objet central avec des orbites liées. Jusqu'à présent, le trou noir semble être la meilleure description possible de cet objet. La FIGURE 5.2 représente l'orbite de l'étoile S2 autour de Sagittarius A*.

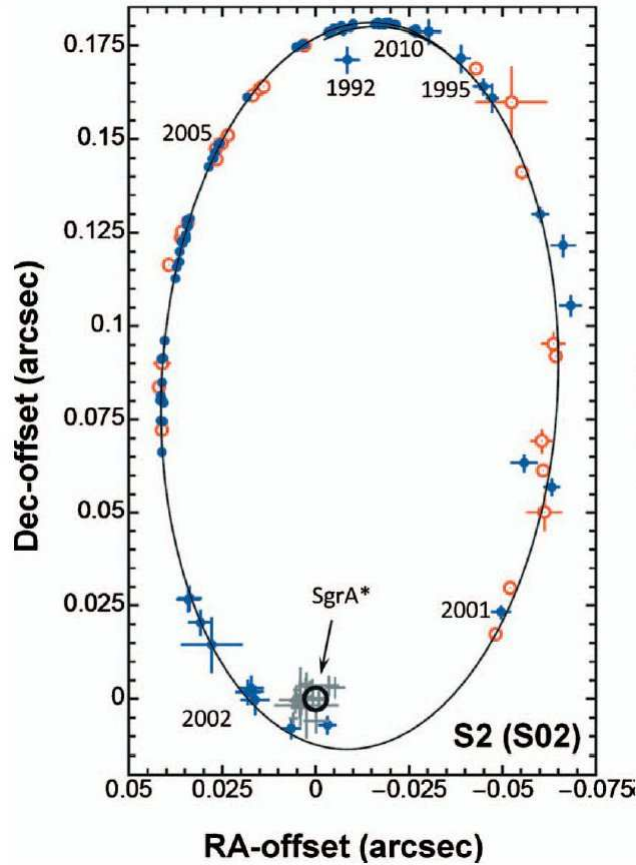


FIGURE 5.2 – Orbite de l'étoile S2 autour de Sagittarius A* [12].

1. Le symbole M_{\odot} désigne la valeur d'une masse solaire *i.e.* $1,989 \times 10^{30}$ kg.

Nous observons que cette orbite est Képlérienne (SgA* n'apparaît pas au foyer en raison de la perspective). De telles observations ont pu mettre en évidence la masse de ce trou noir. Elle est estimée à environ $4 \times 10^6 M_{\odot}$. Les observations ont aussi mis en évidence le spin de cet objet.

Le chapitre suivant est consacré à l'étude des monopoles de Higgs. À partir du lagrangien donné, nous déduisons les équations du champ gravitationnel et du champ de Higgs, nous les résolvons et nous discutons des solutions. Après, nous proposons un début d'alternative au trou noir central de la galaxie (Sgr A*) avec le modèle des monopoles. Nous en étudions les solutions et nous les comparons aux solutions de Schwarzschild à travers les géodésiques matière et lumière. Le dernier chapitre de ce mémoire est consacré aux équations du champ gravitationnel et de Klein-Gordon pour les monopoles en rotation.

Chapitre 6

Les monopoles de Higgs

Ce chapitre est consacré à l'étude des monopoles de Higgs. Les références principales de ce chapitre sont [10], [11], [22] et [23]. Nous décrivons toutes les démarches utiles pour aboutir à de telles configurations. En partant d'un lagrangien initial donné dans [11], nous déduisons les équations du champ gravitationnel et du champ de Higgs pour ensuite en étudier les propriétés. Nous intégrons numériquement les équations obtenues et nous discutons du rôle de certains paramètres.

6.1 La configuration initiale

Nous procédons de la même façon que dans la section 3.6 pour dériver les équations des champs. Nous utilisons la décomposition 3+1 et travaillons avec la métrique en coordonnées aréolaires (cf. annexe A) :

$$ds^2 = -e^{2\nu(r)}dt^2 + e^{2\lambda(r)}dr^2 + e^{2\mu(r)}d\Omega^2 \quad (6.1)$$

avec $d\Omega$ l'angle solide infinitésimal tel que $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2$. Le lagrangien considéré est :

$$L = \sqrt{-g} \left(F(H) \frac{\mathcal{R}}{2\kappa} - \frac{1}{2} (\partial H)^2 - V(H) \right) + L_{mat} [g_{\mu\nu}, \psi_m] \quad (6.2)$$

avec H le champ scalaire de Higgs, ψ_m le champ scalaire représentant la contribution de la matière, \mathcal{R} le scalaire de courbure¹ et :

$$\kappa = \frac{8\pi}{m_{pl}^2} \quad (6.3)$$

$$F(H) = 1 + \frac{\xi}{m_{pl}^2} H^2 \quad (6.4)$$

$$V(H) = \frac{\lambda_{SM}}{4} (H^2 - v^2)^2 \quad (6.5)$$

où m_{pl} est la masse de Planck en GeV (pour les unités voir l'annexe E), λ_{SM} est la constante de couplage associée au potentiel du champ de Higgs dans le modèle standard telle que $\lambda_{SM} = 0.1$, ξ est le paramètre de couplage non minimal (sans dimension) et v est la valeur moyenne dans le vide (vacuum expectation value - *vev*) du champ de Higgs (elle vaut 246 GeV).

1. Plus d'informations sur le scalaire de courbure dans l'annexe A.

Nous supposons aussi que la densité de matière ρ_0 est déterminée par [23] :

$$\rho(r < R) \equiv \rho_0 = \frac{3m_{pl}^2}{8\pi} \frac{r_s}{R^3} \quad (6.6)$$

et

$$\rho(r > R) = 0. \quad (6.7)$$

avec r_s le pseudo rayon de Schwarzschild² tel que $r_s = 2m_b/m_{pl}^2$ avec m_b la masse baryonique du corps et R le rayon du corps.

De plus, nous supposons que l'intérieur du corps se comporte comme un fluide parfait. Il s'en suit que le tenseur énergie-impulsion à la forme suivante :

$$T_\nu^{(mat)\mu} = diag(-\rho, P, P, P) \quad (6.8)$$

avec P la pression à l'intérieur du corps telle que $P(r = R) = 0$.

6.2 Le lagrangien effectif

Comme dans le cas de la géométrie de Schwarzschild, l'intégrale en 4 dimensions se réduit à une dimension (les coefficients métriques sont indépendants de t , θ et ϕ). Dans le but de calculer le lagrangien effectif relatif au problème présenté, nous décomposons le lagrangien en 4 parties (voir ci-dessous). Pour le moment, nous écrivons la partie du lagrangien relative à la matière L_{mat} et nous la traitons indépendamment par la suite.

$$L_1 = \sqrt{-g} \frac{\mathcal{R}}{2\kappa} \quad (6.9)$$

$$L_2 = \sqrt{-g} \frac{\xi}{m_{pl}} H^2 \frac{\mathcal{R}}{2\kappa} \quad (6.10)$$

$$L_3 = -\sqrt{-g} \frac{1}{2} (\partial H)^2 \quad (6.11)$$

$$L_4 = -\sqrt{-g} V(H) \quad (6.12)$$

$$L_5 = L_{mat} \quad (6.13)$$

Parmi ces termes nous reconnaissons le lagrangien de la relativité générale (6.9), le terme relatif à l'énergie cinétique (6.11) et le terme relatif au potentiel (6.12). Le terme (6.10) est spécifique au problème considéré. Par la suite, les variables primées dénoteront une dérivée par rapport à r .

2. Pour plus d'informations sur le pseudo rayon de Schwarzschild voir 6.6.1.

Pour rappel,

- $\sqrt{-g} = e^{\nu+\lambda+2\mu} \sin \theta$;
- $\mathcal{R} = -2 \left\{ e^{-2\lambda} \left[\nu'' + \nu' (\nu' + 2\mu' - \lambda') + 2\mu'' + 3\mu'^2 - 2\lambda'\mu' \right] - e^{-2\mu} \right\}$.

Nous calculons maintenant le lagrangien effectif relatif aux différents termes.

$$L_{eff(1)} = \frac{1}{2\kappa} L_{eff(RG)} \quad (6.14)$$

avec $L_{eff(RG)} = 2e^{\nu-\lambda+2\mu} \mu' (\mu' + 2\nu') + 2e^{\nu+\lambda}$ (voir section 3.6).

$$\begin{aligned} L_2 &= e^{\nu+\lambda+2\mu} \frac{\xi}{m_{pl}^2} H^2 \frac{\mathcal{R}}{2\kappa} \\ &= \frac{\xi}{m_{pl}^2} \frac{1}{2\kappa} H^2 (-2) \left\{ e^{\nu-\lambda+2\mu} \left[\nu'' + \nu' (\nu' + 2\mu' - \lambda') + 2\mu'' + 3\mu'^2 - 2\lambda'\mu' \right] - e^{\nu+\lambda} \right\}. \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que les dérivées totales n'interviennent pas dans le lagrangien effectif et que :

- $\frac{d}{dr} (H^2 \nu' e^{\nu-\lambda+2\mu}) = 2HH'\nu' e^{\nu-\lambda+2\mu} + H^2 e^{\nu-\lambda+2\mu} (\nu'' + \nu' [\nu' - \lambda' + 2\mu'])$
- $\frac{d}{dr} (2H^2 \mu' e^{\nu-\lambda+2\mu}) = 4HH'\mu' e^{\nu-\lambda+2\mu} + 2H^2 e^{\nu-\lambda+2\mu} (\mu'' + \mu' [\nu' - \lambda' + 2\mu'])$.

Nous obtenons :

$$L_{eff(2)} = \frac{1}{2\kappa} \frac{\xi}{m_{pl}^2} \left\{ 4HH'\nu' e^{\nu-\lambda+2\mu} + 8HH'\mu' e^{\nu-\lambda+2\mu} + 2H^2 e^{\nu-\lambda+2\mu} \mu' (2\nu' + \mu') + 2H^2 e^{\nu+\lambda} \right\}. \quad (6.15)$$

Nous pouvons aussi mettre en évidence le lagrangien effectif de la relativité générale et réécrire $L_{eff(2)}$ comme :

$$L_{eff(2)} = \frac{\xi}{2\kappa m_{pl}^2} \left\{ 4HH' e^{\nu-\lambda+2\mu} (\nu' + 2\mu') + H^2 L_{eff(RG)} \right\} \quad (6.16)$$

$$= \frac{1}{\kappa} \frac{dF}{dH} H' e^{\nu-\lambda+2\mu} (\nu' + 2\mu') + \frac{\xi}{2\kappa m_{pl}^2} H^2 L_{eff(RG)}. \quad (6.17)$$

Pour ce qui est de L_3 , nous utilisons la définition suivante :

$$(\partial H)^2 = g^{\mu\nu} \partial_\mu H \partial_\nu H$$

puisque H ne dépend que de r , nous avons :

$$(\partial H)^2 = e^{-2\lambda} H'^2.$$

Et donc,

$$L_{eff(3)} = -H'^2 \frac{e^{\nu-\lambda+2\mu}}{2}. \quad (6.18)$$

Pour le dernier terme, nous avons :

$$L_{eff(4)} = -e^{\nu+\lambda+2\mu}V(H). \quad (6.19)$$

Nous pouvons alors calculer le lagrangien effectif total :

$$L_{eff(TOT)} = L_{eff(1)} + L_{eff(2)} + L_{eff(3)} + L_{eff(4)} + L_{eff(mat)}.$$

Ce qui donne :

$$L_{eff(TOT)} = \frac{1}{2\kappa}F(H)L_{eff(RG)} + \frac{1}{\kappa}\frac{dF}{dH}H'e^{\nu-\lambda+2\mu}(\nu' + 2\mu') - \frac{e^{\nu-\lambda+2\mu}}{2}H'^2 - e^{\nu+\lambda+2\mu}V(H) + L_{eff(mat)} \quad (6.20)$$

où nous avons utilisé la définition de la fonction $F(H)$ afin de simplifier l'expression.

6.3 Les équations du champ gravitationnel et du champ de Higgs

Dans cette section, nous utilisons le principe variationnel pour écrire les équations du champ gravitationnel relatif au problème ainsi que l'équation de Klein-Gordon du champ scalaire H . Pour commencer, nous notons les termes relatifs à la matière de la façon suivante : m_ν le terme correspondant à l'équation ν , m_λ le terme correspondant à λ , etc. De plus, nous utilisons la jauge de Schwarzschild ($e^{2\mu} = r^2$) pour écrire les équations finales.

Commençons par l'équation associée à ν :

$$\frac{\partial L_{eff(TOT)}}{\partial \nu} = \frac{1}{\kappa}F(H) \left(e^{\nu-\lambda+2\mu} [\mu'^2 + 2\mu'\nu'] + e^{\nu+\lambda} \right) + \frac{1}{\kappa}\frac{dF}{dH}H'e^{\nu-\lambda+2\mu}(\nu' + 2\mu') - \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda+2\mu}H'^2 - e^{\nu+\lambda+2\mu}V(H) + m_\nu \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial L_{eff(TOT)}}{\partial \nu'} = \frac{1}{\kappa}F(H)2\mu'e^{\nu-\lambda+2\mu} + \frac{1}{\kappa}\frac{dF}{dH}H'e^{\nu-\lambda+2\mu}. \quad (6.22)$$

Nous posons alors $e^{2\mu} = r^2$ dans (6.22) pour écrire :

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_{eff(TOT)}}{\partial \nu'} \right) = \frac{1}{\kappa}e^{\nu-\lambda} \left(\frac{dF}{dH}H'2r + 2F(H) + 2F(H)r(\nu' - \lambda') + \frac{d^2F}{dH^2}H'^2r^2 + \frac{dF}{dH}H''r^2 + \frac{dF}{dH}H'2r + \frac{dF}{dH}H'r^2(\nu' - \lambda') \right). \quad (6.23)$$

Nous posons aussi $e^{2\mu} = r^2$ dans (6.21) et nous écrivons l'équation relative à ν :

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_{eff(TOT)}}{\partial \nu'} \right) - \frac{\partial L_{eff(TOT)}}{\partial \nu} = 0.$$

Dans notre cas :

$$\lambda' \left(-2F(H)r - \frac{dF}{dH}H'r^2 \right) + H'' \left(\frac{dF}{dH}r^2 \right) - \frac{H'^2}{2}r^2 \left(\kappa + 2\frac{d^2F}{dH^2} \right) - 2r\frac{dF}{dH}H' - F(H) \left(1 - e^{2\lambda} \right) - \kappa r^2 e^{2\lambda}V(H) - m_\nu. \quad (6.24)$$

Nous opérons de la même manière pour l'équation relative à λ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{eff}(TOT)}{\partial \lambda} = \frac{1}{2\kappa} F(H) \left(-2e^{\nu-\lambda+2\mu} \mu' [\mu' + 2\nu'] + 2e^{\nu+\lambda} \right) - \frac{1}{\kappa} \frac{dF}{dH} H' e^{\nu-\lambda+2\mu} (\nu' + 2\mu') \\ - \frac{e^{\nu-\lambda+2\mu}}{2} H'^2 - e^{\nu+\lambda+2\mu} V(H) + m_\lambda \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\frac{\partial L_{eff}(TOT)}{\partial \lambda'} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_{eff}(TOT)}{\partial \lambda'} \right) = 0. \quad (6.26)$$

Pour écrire

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_{eff}(TOT)}{\partial \lambda'} \right) - \frac{\partial L_{eff}(TOT)}{\partial \lambda} = 0$$

nous posons $e^{2\mu} = r^2$ dans (6.25) et nous avons

$$-\nu' \left(2F(H)r + \frac{dF}{dH} H' r^2 \right) - F(H) (1 - e^{2\lambda}) + \frac{r^2}{2} H'^2 \kappa - \frac{dF}{dH} H' 2r - \kappa r^2 e^{2\lambda} V(H) + m_\lambda = 0. \quad (6.27)$$

Pour l'équation associée à μ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{eff}(TOT)}{\partial \mu} = \frac{1}{\kappa} F(H) \left(2e^{\nu-\lambda+2\mu} \mu' [\mu' + 2\nu'] \right) + \frac{2}{\kappa} \frac{dF}{dH} H' e^{\nu-\lambda+2\mu} (\nu' + 2\mu') \\ - e^{\nu-\lambda+2\mu} \frac{H'^2}{2} - 2e^{\nu+\lambda+2\mu} V(H) + m_\mu \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$\frac{\partial L_{eff}(TOT)}{\partial \mu'} = \frac{2}{\kappa} F(H) e^{\nu-\lambda+2\mu} (\mu' + \nu') + \frac{2}{\kappa} \frac{dF}{dH} H' e^{\nu-\lambda+2\mu}. \quad (6.29)$$

Nous posons $e^{2\mu} = r^2$ dans (6.29) pour écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_{eff}(TOT)}{\partial \nu'} \right) = \frac{e^{\nu-\lambda}}{\kappa} \left([\nu' - \lambda'] \left[2F(H)r + 2F(H)r^2 \nu' + \frac{dF}{dH} H' 2r^2 \right] + 2 \frac{dF}{dH} H' r \right. \\ \left. + 2F(H) + 2 \frac{dF}{dH} H' r^2 \nu' + 4F(H)r \nu' + 2F(H)r^2 \nu'' + 2 \frac{d^2 F}{dH^2} H'^2 r^2 + 2 \frac{dF}{dH} H'' r^2 + 4 \frac{dF}{dH} H' r \right). \end{aligned} \quad (6.30)$$

En posant $e^{2\mu} = r^2$ dans (6.28), nous pouvons calculer :

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_{eff}(TOT)}{\partial \mu'} \right) - \frac{\partial L_{eff}(TOT)}{\partial \mu} = 0.$$

Dans notre cas :

$$\begin{aligned} \nu'' F(H)r + \frac{dF}{dH} H'' r + \lambda' \left(-F(H) - F(H)r \nu' - \frac{dF}{dH} H' r \right) = \\ -\nu'^2 F(H)r - \nu' \left(F(H) + \frac{dF}{dH} H' r \right) - \frac{dF}{dH} H' - \frac{d^2 F}{dH^2} H'^2 r - \frac{r\kappa}{2} \left(H'^2 + 2e^{2\lambda} V(H) \right) + m_\mu. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Passons maintenant à l'équation du champ ou équation de Klein-Gordon.

$$\frac{\partial L_{eff(TOT)}}{\partial H} = \frac{1}{\kappa} \frac{dF}{dH} \left(e^{\nu-\lambda+2\mu} \mu' (\mu' + 2\nu') + e^{\nu+\lambda} \right) + \frac{1}{\kappa} \frac{d^2 F}{dH^2} H' e^{\nu-\lambda+2\mu} (\nu' + 2\mu') - e^{\nu+\lambda+2\mu} \frac{dV}{dH} \quad (6.32)$$

$$\frac{\partial L_{eff(TOT)}}{\partial H'} = \frac{1}{\kappa} \frac{dF}{dH} e^{\nu-\lambda+2\mu} (\nu' + 2\mu') - e^{\nu-\lambda+2\mu} H'. \quad (6.33)$$

Nous posons $e^{2\mu} = r^2$ dans (6.33) pour écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_{eff(TOT)}}{\partial H'} \right) &= \frac{(\nu' - \lambda')}{\kappa} e^{\nu-\lambda} \left(\frac{dF}{dH} r^2 \nu' + \frac{dF}{dH} 2r - \frac{r^2}{2} H' \kappa \right) + \\ &\frac{e^{\nu-\lambda}}{\kappa} \left(\frac{d^2 F}{dH^2} H' r^2 \nu' + \frac{dF}{dH} 2r \nu' + \frac{dF}{dH} r^2 \nu'' + 2 \frac{d^2 F}{dH^2} H' r + 2 \frac{dF}{dH} - 2r H' \kappa - r^2 H'' \kappa \right). \end{aligned} \quad (6.34)$$

En posant $e^{2\mu} = r^2$ dans (6.32), nous pouvons calculer :

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L_{eff(TOT)}}{\partial H'} \right) - \frac{\partial L_{eff(TOT)}}{\partial H} = 0.$$

Dans notre cas :

$$\begin{aligned} \nu'' \frac{dF}{dH} r^2 - r^2 H'' \kappa + \lambda' \left(-\frac{dF}{dH} r^2 \nu' - 2 \frac{dF}{dH} r + r^2 H' \kappa \right) = \\ - \nu'^2 \frac{dF}{dH} r^2 + \nu' \left(-\frac{dF}{dH} 2r + \kappa H' r^2 \right) - \frac{dF}{dH} (1 - e^{2\lambda}) + 2r H' \kappa - \kappa r^2 e^{2\lambda} \frac{dV}{dH}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Remarque : il n'y a pas de terme matière dans l'équation de Klein-Gordon car L_{mat} est indépendant de H et de H' .

6.4 Expressions des termes relatifs à la matière dans les équations du champ gravitationnel

Pour connaître l'expression des termes relatifs à la matière dans les équations du champ gravitationnel, nous comparons les expressions (6.24), (6.27) et (6.31) pour $H = 0$ avec les équations correspondantes en géométrie de Schwarzschild (3.5). En effet, si le champ scalaire H est nul, la métrique est la seule à décrire la gravitation et nous retombons sur le cas de la relativité générale. Nous pouvons alors déduire les expressions m_ν , m_λ et m_μ par comparaison.

Remarque : il est évident que lorsque nous nous trouvons à l'extérieur du corps, il n'y a plus lieu de considérer la matière.

Pour l'équation relative à ν , nous posons $H = 0$ dans (6.24) et nous obtenons :

$$-2r\lambda' = -1 + e^{2\lambda} - m_\nu. \quad (6.36)$$

Par comparaison avec l'équation du champ gravitationnel dans l'espace-temps de Schwarzschild correspondante nous obtenons³ : $m_\nu = \frac{3}{\mathfrak{R}^2} e^{2\lambda} r^2$.

Pour l'équation relative à λ , nous posons $H = 0$ dans (6.27) et nous obtenons :

$$-2r\nu' - 1 + e^{2\lambda} = -m_\lambda. \quad (6.37)$$

Par comparaison, nous avons $m_\lambda = \frac{3}{\mathfrak{R}^2} \frac{P}{\rho} e^{2\lambda} r^2$.

Pour l'équation relative à μ :

$$\nu''r + \lambda(-r\nu') - \lambda' = -\nu'^2r - \nu' + m_\mu. \quad (6.38)$$

Et $m_\mu = \frac{3}{\mathfrak{R}^2} \frac{P}{\rho} e^{2\lambda} r$, par le même procédé que précédemment.

Nous pouvons alors écrire les équations complètes :

$$\begin{aligned} \lambda' \left(-2F(H)r - \frac{dF}{dH} H' r^2 \right) + H'' \left(\frac{dF}{dH} r^2 \right) = \\ - \frac{H'^2}{2} r^2 \left(\kappa + 2 \frac{d^2 F}{dH^2} \right) - 2r \frac{dF}{dH} H' - F(H) (1 - e^{2\lambda}) - \kappa r^2 e^{2\lambda} V(H) - \frac{3}{\mathfrak{R}^2} e^{2\lambda} r^2 \end{aligned} \quad (6.39)$$

$$\begin{aligned} - \nu' \left(2F(H)r + \frac{dF}{dH} H' r^2 \right) - F(H) (1 - e^{2\lambda}) + \frac{r^2}{2} H'^2 \kappa - 2 \frac{dF}{dH} H' r - \kappa r^2 e^{2\lambda} V(H) \\ + \frac{3}{\mathfrak{R}^2} \frac{P}{\rho} e^{2\lambda} r^2 = 0 \end{aligned} \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} \nu'' (F(H)r) + \frac{dF}{dH} H'' r + \lambda' \left(-F(H) - F(H)r\nu' - \frac{dF}{dH} H' r \right) = -\nu'^2 F(H)r \\ - \nu' \left(F(H) + \frac{dF}{dH} H' r \right) - \frac{dF}{dH} H' - \frac{d^2 F}{dH^2} H'^2 r - \frac{r\kappa}{2} (H'^2 + 2e^{2\lambda} V(H)) + \frac{3}{\mathfrak{R}^2} \frac{P}{\rho} e^{2\lambda} r \end{aligned} \quad (6.41)$$

$$\begin{aligned} \nu'' \left(\frac{dF}{dH} r^2 \right) - H'' r^2 \kappa + \lambda' \left(-\frac{dF}{dH} r^2 \nu' - \frac{dF}{dH} 2r + r^2 H' \kappa \right) = \\ - \nu'^2 \left(\frac{dF}{dH} r^2 \right) + \nu' \left(-\frac{dF}{dH} 2r + \kappa H' r^2 \right) - \frac{dF}{dH} (1 - e^{2\lambda}) + 2r H' \kappa - \kappa r^2 e^{2\lambda} \frac{dV}{dH}. \end{aligned} \quad (6.42)$$

3. Pour rappel, $\mathfrak{R}^2 = \frac{R^3}{r_s}$ avec R le rayon du corps et r_s le rayon de Schwarzschild du corps.

6.5 La pression et le tenseur énergie-impulsion

Afin de simplifier les équations du champ pour les intégrer numériquement, nous utilisons l'équation de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (6.43)

$$\frac{dP}{dr} = -\nu'(P + \rho) \quad (6.43)$$

pour écrire :

$$\frac{P}{\rho_0} = \mathcal{C}e^{-\nu} - 1. \quad (6.44)$$

Nous ne détaillons pas l'intégration car cela a déjà été fait à la section 3.7.

Pour commencer, nous utilisons la même valeur de \mathcal{C} qu'en géométrie de Schwarzschild ($\mathcal{C} = \frac{2\sqrt{1-s}}{3\sqrt{1-s}-1}$ avec s la compacité du corps). Par la suite et pour prendre en compte l'influence du champ de Higgs, nous utiliserons une méthode de tir lors de l'intégration numérique afin de déterminer un \mathcal{C} tel que $P(r = R) = 0$.

Une autre façon d'écrire les équations du champ gravitationnel est la suivante ⁴

$$\left(1 + \frac{\xi}{m_{pl}^2} H^2\right) G_{\mu\nu} = \kappa \left[T_{\mu\nu}^{(mat)} + T_{\mu\nu}^{(H)} + T_{\mu\nu}^{(\xi)}\right] \quad (6.45)$$

avec $G_{\mu\nu}$ le tenseur d'Einstein défini en (1.16). Dans ce cas, nous devons inclure l'équation de Klein-Gordon (6.46) pour écrire l'équation du champ de Higgs et compléter le système.

$$\square H + \frac{\xi H \mathcal{R}}{8\pi} = \frac{dV}{dH} \quad (6.46)$$

Les composantes du tenseur énergie-impulsion sont décrites dans [10]. Nous avons, dans l'ordre, la composante relative à la matière, au champ et au paramètre de couplage :

$$T_{\mu\nu}^{(mat)} = (\rho + P)u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}P \quad (6.47)$$

$$T_{\mu\nu}^{(H)} = \partial_\mu H \partial_\nu H - \frac{1}{2} \left[(\partial H)^2 + 2V(H) \right] \quad (6.48)$$

$$T_{\mu\nu}^{(\xi)} = -\frac{\xi}{4\pi} \left[g_{\mu\nu} \nabla^\lambda (H \nabla_\lambda H) - \nabla_\mu (H \nabla_\nu H) \right] \quad (6.49)$$

avec u_μ la quadri-vitesse. Les expressions de ces tenseurs sont données dans l'annexe C.

6.6 Intégration des équations

Dans cette section, nous intégrons numériquement les équations du champ gravitationnel et du champ de Higgs. Nous travaillons avec des quantités très petites, afin de mettre en évidence leurs infimes variations nous utilisons le changement de variables décrit ci-dessous [23].

4. Cette méthode donne les mêmes équations que celle que nous avons détaillé.

6.6.1 Changement de variables

Pour commencer, nous définissons $H = m_{pl}\tilde{v}h$ avec $\tilde{v} = \frac{246\text{GeV}}{m_{pl}}$ la *vev* sans dimension, h le champ scalaire de Higgs sans dimension et m_{pl} la masse de Planck en GeV.

Nous utilisons également les changements suivants :

$$u = \frac{r}{r_s} \quad (6.50)$$

$$h = 1 + \chi \quad (6.51)$$

$$F = 1 + \xi\tilde{v}^2(1 + \chi)^2 \quad (6.52)$$

$$\mathcal{V} = V \frac{r_s^2}{m_{pl}^2} = \frac{\lambda_{SM}}{4} r_s^2 m_{pl}^2 \tilde{v}^4 (h^2 - 1)^2. \quad (6.53)$$

Notons les dimensions que nous utilisons pour le pseudo rayon de Schwarzschild :

$$[r_s] = [\text{GeV}^{-1}].$$

Où nous avons posé

$$r_s = \frac{2m_b}{m_{pl}^2}$$

avec m_b la masse baryonique de l'objet en GeV. Cette définition n'est pas exactement celle du rayon de Schwarzschild⁵, nous utilisons cette expression pour déterminer un ordre de grandeur.

Les variables (sans dimension) que nous utiliserons dorénavant sont listées ci-dessous.

$$\begin{aligned} \nu' &= \frac{\nu_u}{r_s} & \nu'' &= \frac{\nu_{uu}}{r_s^2} \\ \lambda' &= \frac{\lambda_u}{r_s} & \lambda'' &= \frac{\lambda_{uu}}{r_s^2} \\ H &= m_{pl}\tilde{v}(1 + \chi) & H' &= \frac{m_{pl}}{r_s}\tilde{v}\chi_u \\ H'' &= \frac{m_{pl}}{r_s^2}\tilde{v}\chi_{uu} & \frac{dF}{dH} &= \frac{1}{m_{pl}\tilde{v}} \frac{dF}{d\chi} \\ \frac{d^2F}{dH^2} &= \frac{1}{m_{pl}^2\tilde{v}^2} \frac{d^2F}{d\chi^2} \end{aligned}$$

où l'indice u dénote de la dérivée par rapport à u .

5. Nous ne pouvons définir r_s que dans les coordonnées de Schwarzschild et nous ne travaillons pas avec ces coordonnées a priori.

Nous pouvons alors écrire les équations des champs en fonction de ces variables (dans l'ordre (t, t) , (r, r) , (θ, θ) et Klein Gordon).

$$\lambda_u \left(-2Fu - \frac{dF}{d\chi} u^2 \chi_u \right) + \chi_{uu} \frac{dF}{d\chi} u^2 = -\frac{u^2}{2} \tilde{v}^2 (\chi_u)^2 \left(8\pi + \frac{2}{\tilde{v}^2} \frac{d^2 F}{d\chi^2} \right) - 2 \frac{dF}{d\chi} \chi_u u - F(1 - e^{2\lambda}) - 8\pi \mathcal{V} u^2 e^{2\lambda} - 3s^3 u^2 e^{2\lambda} \frac{\rho}{\rho_0} \quad (6.54)$$

$$0 = -\nu_u \left(2uF + \frac{dF}{d\chi} \chi_u u^2 \right) + 4\pi \tilde{v}^2 u^2 \chi_u^2 - F(1 - e^{2\lambda}) - \frac{dF}{d\chi} \chi_u 2u - 8\pi u^2 e^{2\lambda} \mathcal{V} + 3s^3 u^2 e^{2\lambda} \frac{P}{\rho_0} \quad (6.55)$$

$$\nu_{uu} Fu + \chi_{uu} \frac{dF}{d\chi} u + \lambda_u \left(-Fu\nu_u - F - \frac{dF}{d\chi} \chi_u u \right) = -Fu\nu_u^2 - \nu_u \left(F + \frac{dF}{d\chi} u \chi_u \right) - \frac{dF}{d\chi} \chi_u - \frac{d^2 F}{d\chi^2} (\chi_u)^2 u - 4\pi u \tilde{v}^2 \chi_u^2 - 8\pi u e^{2\lambda} \mathcal{V} + 3s^3 u \frac{P}{\rho_0} e^{2\lambda} \quad (6.56)$$

$$\nu_{uu} u^2 \frac{dF}{d\chi} - 8\pi u^2 \tilde{v}^2 \chi_{uu} - \lambda_u \left(\frac{dF}{d\chi} \nu_u u^2 + 2u \frac{dF}{d\chi} - 8\pi \tilde{v}^2 \chi_u u^2 \right) = -(\nu_u)^2 u^2 \frac{dF}{d\chi} + \nu_u \left(-\frac{dF}{d\chi} 2u + 8\pi u^2 \tilde{v}^2 \chi_u \right) - \frac{dF}{d\chi} (1 - e^{2\lambda}) + 16\pi \tilde{v}^2 \chi_u u - 8\pi u^2 e^{2\lambda} \frac{d\mathcal{V}}{d\chi}. \quad (6.57)$$

6.6.2 Démarche générale

Nous ramenons le système défini par (6.54), (6.55), (6.56) et (6.57) à un problème de Cauchy. Rappelons qu'un tel problème est de la forme :

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = f(x, \vec{y}) \quad (6.58)$$

avec

$$\vec{y}(0) = y_0$$

pour condition initiale.

Dans notre cas, nous avons :

$$\frac{d\vec{y}}{du} = f(u, \vec{y}) \quad (6.59)$$

avec $\vec{y} = (\nu, \nu_u, \lambda, \chi, \chi_u)$ et $y_0 = (0, 0, 0, \chi_c, 0)$ où χ_c est un paramètre libre.

Dans la pratique, il faut donner les expressions de ν_{uu} , λ_u et χ_{uu} . Pour ce faire, nous transformons le système formé par (6.54), (6.56) et (6.57) et le mettons sous la forme :

$$Ay_u = b \quad (6.60)$$

avec $y = (\nu, \nu_u, \lambda, \chi, \chi_u)$ et $\nu(0) = 0$, $\nu_u(0) = 0$, $\lambda(0) = 0$, $\chi(0) = \chi_c$ et $\chi_u(0) = 0$.

Remarques : Pour créer un système de cinq équations alors que nous n'en avons que trois, nous nous servons des relations : $\nu_u = \frac{d\nu}{du}$ et $\chi_u = \frac{d\chi}{du}$. De plus, nous utilisons l'équation (6.55) afin de vérifier nos résultats. Nous ne pouvons pas intégrer le système à partir de $u = 0$ puis qu'il y a une indétermination en ce point. Pour contourner ce problème nous intégrons le système à partir de $u = 10^{-6}U$ avec $U = R/r_s$.

6.6.3 Intégration numérique

Avec la méthode d'intégration dite numérique nous intégrons d'abord le système $Ay_u = b$ présenté en (6.60). Ensuite, nous inversons le système pour obtenir y . Pour intégrer, nous utilisons l'intégrateur **ode45** prédéfini en Matlab⁶. Remarquons qu'avec cette méthode nous devons inverser une matrice, ce qui n'est pas très commode. Nous comparons cette méthode à l'intégration dite analytique décrite dans le paragraphe suivant.

6.6.4 Intégration analytique

Avec la méthode d'intégration dite analytique, nous intégrons le système $y' = A^{-1}b$ qui provient de (6.60) avec la fonction **ode45**. Cette méthode évite d'inverser la matrice A après avoir intégré. Remarque : les expressions analytiques sont obtenues via la toolbox symbolique de Matlab.

6.6.5 Comparaison des deux méthodes d'intégration

Les FIGURES 6.1 et 6.2 donnent une indication de la différence entre la solution analytique et la solution numérique (échelle logarithmique) pour un objet de compacité $s = 0.05$, de masse $m = 10$ kg, ayant paramètre de couplage $\xi = 100$ et une valeur du champ de Higgs au centre de 0.25. Nous observons que l'écart absolu entre les deux solutions ne dépasse jamais 10^{-8} . Ce type de graphe a été produit pour plusieurs jeux de paramètres afin de conclure que le choix de la méthode n'a pas d'influence sur les solutions. Tous les résultats présentés dans la suite ont été obtenus avec la méthode analytique.

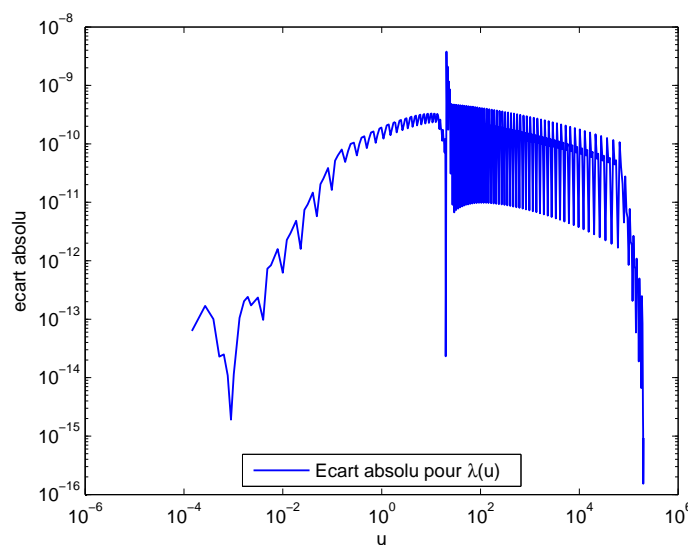


FIGURE 6.1 – Comparaison des deux méthodes d'intégration pour $\lambda(u)$.

6. Plus d'informations sur cet intégrateur dans l'annexe D.

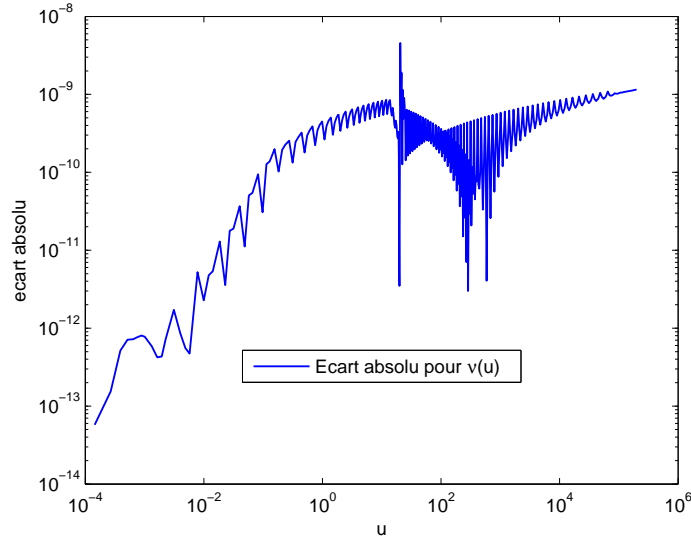


FIGURE 6.2 – Comparaison des deux méthodes d'intégration pour $\nu(u)$.

6.6.6 Contrainte hamiltonienne

Comme précisé plus haut, nous utilisons l'équation (6.55) afin de vérifier que notre intégration s'est bien passée. Cette équation est en réalité la contrainte hamiltonienne du système. La FIGURE 6.3 représente l'écart absolu de cette expression à sa solution exacte.

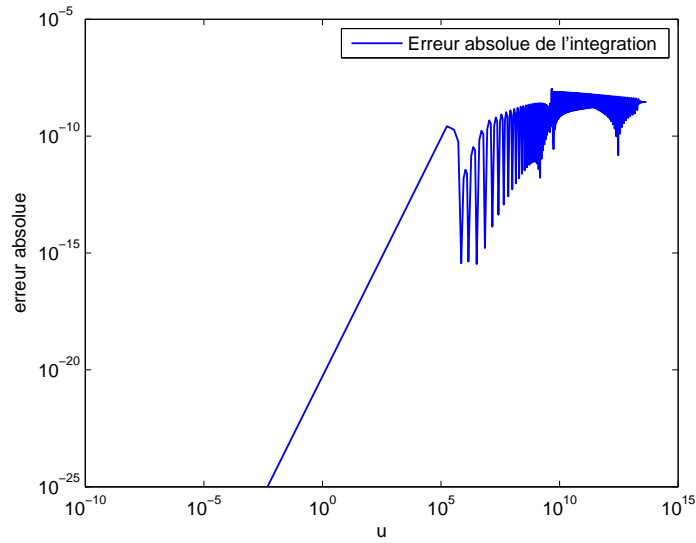


FIGURE 6.3 – Contrainte hamiltonienne.

6.7 L'équation de Klein-Gordon revisitée et le potentiel effectif

L'équation de Klein-Gordon (6.57) peut se réécrire de la manière suivante [23] :

$$\chi_{uu} - \chi_u \left[\lambda_u - \nu_u - \frac{2}{u} \right] = \frac{e^{2\lambda}}{\tilde{v}} \left[\frac{-\mathcal{R}}{16\pi} \frac{dF}{d\chi} + \frac{d\mathcal{V}}{d\chi} \right]. \quad (6.61)$$

En tenant compte du fait que

$$\square h = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu h), \quad (6.62)$$

nous pouvons réécrire (6.61) comme :

$$\square h = \left[\frac{-\xi \mathcal{R}}{8\pi} + \lambda_{SM} m_{pl}^2 \tilde{v}^2 (h^2 - 1) \right] h \quad (6.63)$$

Nous pouvons alors écrire [10] :

$$\left[\frac{-\xi \mathcal{R}}{8\pi} + \lambda_{SM} m_{pl}^2 \tilde{v}^2 (h^2 - 1) \right] h = \frac{-dV_{eff}}{dh} \quad (6.64)$$

avec V_{eff} , le potentiel effectif du système. De par la présence de \mathcal{R} , le scalaire de courbure, nous savons que le potentiel effectif prendra des valeurs différentes à l'intérieur et à l'extérieur du corps.

À l'intérieur du corps, nous approximations le scalaire de courbure par $\mathcal{R} \approx \mathcal{R}(r = R) = \frac{3s^3}{r_s^2}$ avec R le rayon du corps et à l'extérieur du corps, nous posons $\mathcal{R} \approx 0$ (cf. [10] pour les justifications). Nous pouvons alors intégrer l'équation (6.64) et donner les expressions analytiques des potentiels effectifs intérieur et extérieur :

$$V_{eff}^{in} \approx \frac{3\xi s^3 h^2}{16\pi r_s^2} - \frac{\lambda_{SM}}{4} m_{pl}^2 \tilde{v}^2 (h^2 - 1)^2 \quad (6.65)$$

$$V_{eff}^{out} \approx -\frac{\lambda_{SM}}{4} m_{pl}^2 \tilde{v}^2 (h^2 - 1)^2. \quad (6.66)$$

Les points d'équilibre pour le potentiel extérieur sont 0, -1 et 1. Pour ce qui est du potentiel intérieur, ceux-ci sont donnés par :

$$h_{eq1}^{int} = 0 \quad (6.67)$$

$$h_{eq2}^{int} = \sqrt{1 + \frac{3s^3 \xi}{8\pi r_s^2 \lambda_{SM} m_{pl}^2 \tilde{v}^2}} \quad (6.68)$$

$$h_{eq3}^{int} = -\sqrt{1 + \frac{3s^3 \xi}{8\pi r_s^2 \lambda_{SM} m_{pl}^2 \tilde{v}^2}}. \quad (6.69)$$

La FIGURE 6.4 est une représentation qualitative de ces deux potentiels.

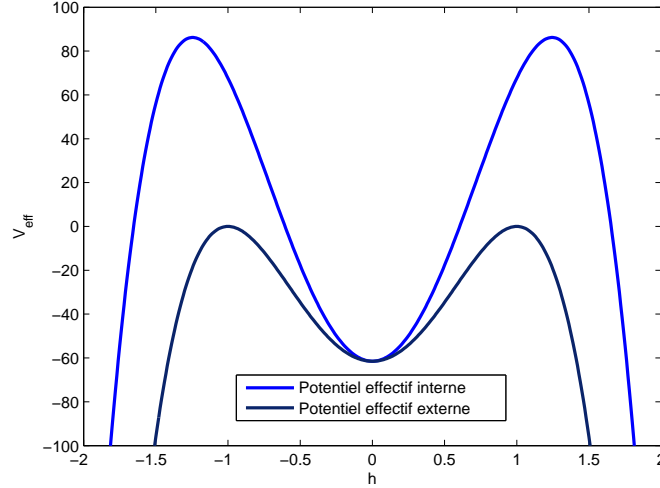


FIGURE 6.4 – Illustration des potentiels effectifs intérieur et extérieur.

Nous observons le point d'équilibre en $h = 0$ est commun aux deux potentiels. C'est le terme $\frac{3s^3\xi}{8\pi r_s^2\lambda_{SM}m_{pl}^2\tilde{v}^2}$ qui distingue les points d'équilibre du potentiel intérieur au potentiel extérieur, d'où l'importance du paramètre de couplage ξ . En effet, si celui-ci est nul, il n'y a plus de différence entre les potentiels effectifs. Remarquons que le point d'équilibre du potentiel extérieur $h = 1$ correspond en fait à la *vev* puisque nous avons changé de variables.

6.8 Les monopoles

Suite à l'étude des potentiels effectifs et de leurs points d'équilibre, nous pouvons décrire le comportement du champ.

Commençons par étudier le cas $\xi = 0$. D'une part, si le champ à l'origine h_c est plus grand que 1 ou plus petit que -1 (points d'équilibre instables), il va diverger par la suite à l'infini. De telles configurations n'ont pas un grand intérêt. D'autre part, si h_c est compris entre -1 et 1 le champ sera attiré par le point d'équilibre stable $h = 0$. Ce point d'équilibre n'est pas intéressant car c'est une solution d'énergie infinie pour le système car le potentiel y est non nul (voir FIGURE 6.4). La seule façon d'obtenir un champ qui vaut toujours 1 (donc la *vev*) c'est de prendre h_c en cette valeur.

Maintenant supposons que $\xi \neq 0$, cela implique que le potentiel effectif prend une forme différente à l'intérieur et à l'extérieur du corps. Il existe des solutions de type particule dont la valeur du champ au centre est telle qu'à l'infini $h = 1$ (*i.e* dans les coordonnées de départ le champ tend vers la *vev*). De telles solutions sont possibles si $0 < |h_c| < |h_{eq2,3}^{in}|$, elles sont appelées les monopoles de Higgs. Selon les valeurs des paramètres, nous pouvons borner la valeur de h_c pour avoir un monopole. En pratique nous utilisons une méthode de tir afin de déterminer cette valeur [11].

La FIGURE 6.5 est une représentation des champ de Higgs pour des monopoles présentant les paramètres suivants :

	masse	compacité	ξ
bleu	100 GeV	0.75	10
rouge	10 GeV	0.2	10
vert	1000 GeV	0.5	1

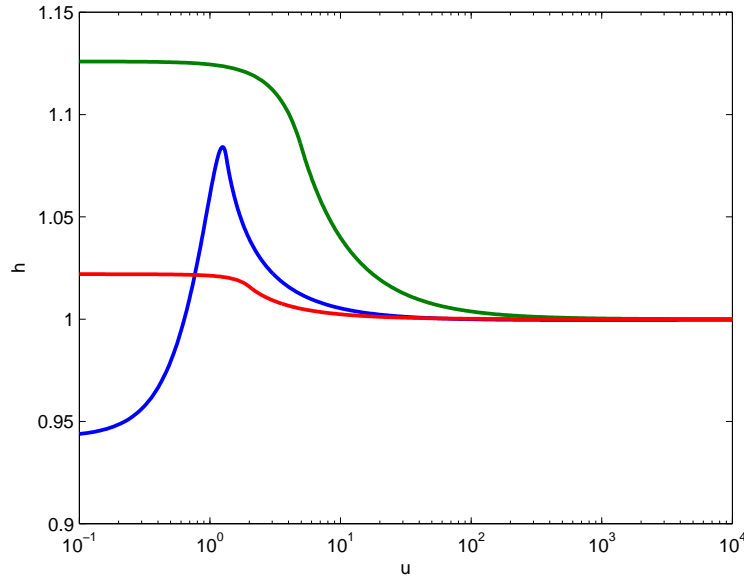


FIGURE 6.5 – Exemples de solutions de monopoles de Higgs.

Notons que nous ne pouvons trouver qu'une valeur approchée de h_c , celui-ci étant un nombre irrationnel. Numériquement, nous aurons toujours une divergence du champ vers l'équilibre $h = 0$ ou $h = \pm\infty$. Il suffit d'intégrer pour une distance radiale suffisamment grande pour s'en rendre compte.

6.9 Écart à la solution de Schwarzschild

Les FIGURES 6.6 et 6.7 sont les représentations de l'écart absolu entre les coefficients métriques associés à la solution de Schwarzschild et ceux associés à la solution pour un monopole avec les paramètres suivants : $s = 0.1$, $\xi = 10$ et $m = 1000\text{kg}$.

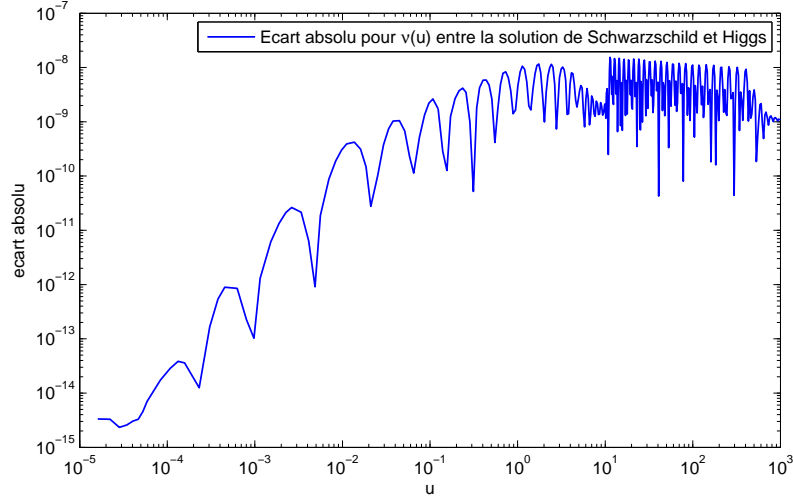


FIGURE 6.6 – Ecart absolu entre $\nu(u)$ pour Schwarzschild et $\nu(u)$ pour la solution du Higgs monopole.

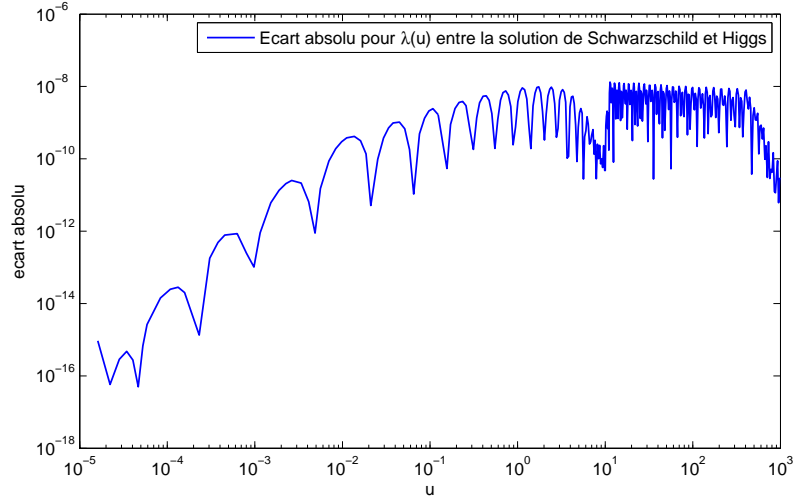


FIGURE 6.7 – Ecart absolu entre $\lambda(u)$ pour Schwarzschild et $\lambda(u)$ pour la solution du Higgs monopole.

Nous observons que la différence entre ces deux solutions est composée essentiellement de bruit numérique. Des graphes semblables ont été créés pour beaucoup de jeux de paramètres, tous présentaient un écart identique. La différence entre la solution de Schwarzschild et celle des monopoles est négligeable quel que soit le jeu de paramètres. Cela peut se justifier par le fait que le champ de Higgs varie très peu à l'intérieur de l'objet et que le scalaire de courbure à l'intérieur du corps est bien plus grand qu'à l'extérieur [10]. Il s'en suit que tous les termes issus de dérivées dans (6.48) et (6.49) sont très petits. Il ne reste alors que les termes en matière et le potentiel pour influencer la dynamique. En tenant compte de ceci, du fait que $\frac{dH}{dr} = 0$ au centre du corps et que $(v/m_{pl}^2) \sim 10^{-34}$, nous pouvons modifier l'équation (6.45) et dire que les équations d'Einstein peuvent, dans ce cas, être approximées par celles issues de la métrique de Schwarzschild (cf. [10]). Les équations des géodésiques sont alors identiques au cas présenté au chapitre 4, nous ne les étudierons donc pas une deuxième fois.

Par la suite, nous allons faire varier les paramètres v et λ_{SM} afin de rendre les solutions significativement différentes de celles de Schwarzschild. Nous allons étudier ces solutions autour d'objets compacts astrophysiques.

6.10 La masse ADM

La dernière section de ce chapitre est consacrée à la masse ADM. La FIGURE 6.8 représente la variation relative de la masse ADM tout au long de l'intégration des équations du champ gravitationnel et du champ de Higgs pour un monopole avec les paramètres suivants : $\xi = 10$, $m = 100$ GeV et $s = 0.5$. Pour rappel, ce que nous appelons variation relative de la masse ADM est définie par : $\delta\tilde{M} = (\tilde{M}_{ADM}(\bar{R} + \delta\bar{R}) - \tilde{M}_{ADM}(\bar{R})) / \tilde{M}_{ADM}(\bar{R})$. Avec \bar{R} la plus grande valeur radiale pour laquelle nous avons les solutions (lors de l'intégration) et $\delta\bar{R}$ l'écart entre 2 pas d'intégration. Nous avons aussi tracé l'évolution de la masse ADM durant l'intégration (voir FIGURE 6.9).

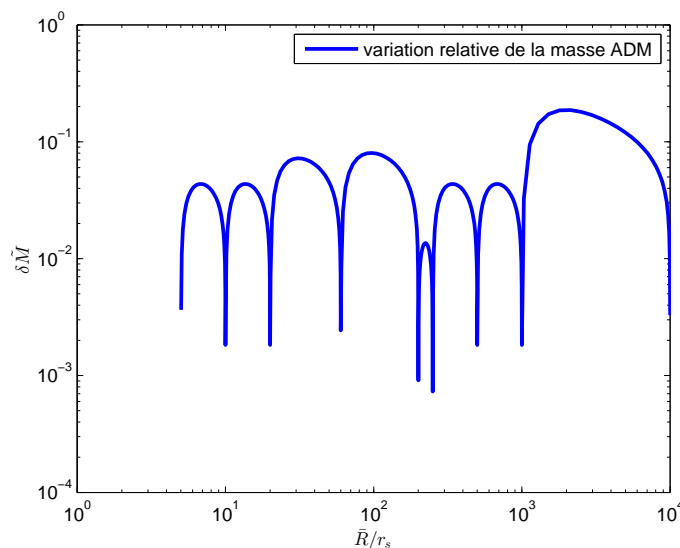


FIGURE 6.8 – Variation relative de la masse ADM pour un monopole.

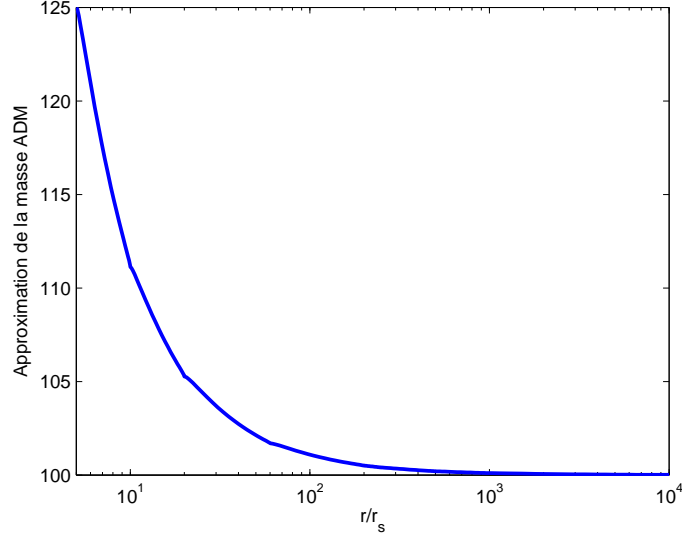


FIGURE 6.9 – Approximation de la masse ADM pour un monopole durant l'intégration.

La variation relative de la masse ADM est plus grande tout au long de l'intégration que celle observée en géométrie de Schwarzschild (voir FIGURE 3.6). Bien que les coefficients de la métrique soient fort semblables (voir section précédente), puisque les équations à intégrer pour les obtenir ne sont pas les mêmes, il est possible d'obtenir des comportements différents. De telles figures nous donnent une indication sur la fiabilité et la précision des intégrateurs utilisés. Une perspective intéressante est d'étudier la masse ADM de ces monopoles en fonction des paramètres.

Le chapitre suivant est consacré à l'étude de solutions issues du même modèle mais pour un objet de masse et de compacité semblables à celle du trou noir central de notre galaxie. Pour ce faire nous allons changer certains paramètres maintenus constants précédemment. Ensuite, nous étudierons les géodésiques relatives à l'espace-temps obtenu et nous les comparerons avec celles issues de l'espace-temps de Schwarzschild.

Chapitre 7

Construction d'une alternative au trou noir Sagittarius A*

Sagittarius A* (Sgr A*) est un trou noir supermassif situé dans la constellation du Sagittaire et localisé au centre de notre galaxie, la Voie Lactée. Cet objet a une masse d'environ $4 \times 10^6 M_\odot$ et a une compacité assez élevée¹ (supérieur au dixième). Nous adaptons le modèle des monopoles de Higgs développé au chapitre précédent à une masse et à une compacité semblable à celle de Sgr A*. Pour ce faire, nous devons modifier certains paramètres supposés constants jusque là. Ce nouveau modèle constitue alors le début d'une alternative au trou noir central de la galaxie.

Pour commencer, nous analysons et comparons les métriques obtenues avec les différents paramètres exploitables. Nous discutons de la masse ADM de l'objet. Pour finir, nous étudions les géodésiques (matière et lumière) associées à une de ces métriques et les comparons avec les géodésiques issues de l'espace-temps de Schwarzschild (cf. chapitre 4).

Remarque : tout au long de ce chapitre, nous continuons à utiliser les notations du modèle standard présentées au chapitre précédent. Comme précisé plus haut certaines valeurs maintenues constantes jusqu'à présent vont varier, ces appellations sont alors des abus de notation.

7.1 La compacité

Nous savons que Sgr A* est un objet relativement compact. Nous présentons ici les solutions du système étudié au chapitre précédent avec une compacité variant de 0.1 à 0.5. La constante couplage $\lambda_{SM} = 10^{-96}$, le paramètre de couplage $\xi = 1$ et la *vev* $v = 1.2211 \times 10^{19} \text{GeV}$ (= la masse de Planck). Dans ce cas, $\xi \tilde{v}^2$ n'est plus négligeable (voir [11] et expression (6.2)) et nous obtenons des solutions notablement différentes de celles de Schwarzschild, nous les baptisons : Sgr A* « monopoles ». Les FIGURES 7.1 et 7.2 représentent les solutions des équations du champ gravitationnel pour cet ensemble de paramètres. Pour rappel, nous avons utilisé le changement de variable : $u = r/r_s$ et la compacité s est définie comme r_s/R avec R le rayon du corps et r_s le pseudo rayon de Schwarzschild du corps.

Remarque : Nous n'avons pas réalisé une étude exhaustive de l'espace des paramètres λ_{SM} et v qui permettent de faire des alternatives au trou noir Sgr A*. Les paramètres retenus ici proviennent d'un choix arbitraire pour construire une alternative intéressante. Une perspective de ce mémoire serait d'étudier de façon exhaustive l'espace des paramètres.

1. Un corps a une compacité assez élevée lorsqu'elle dépasse le centième.

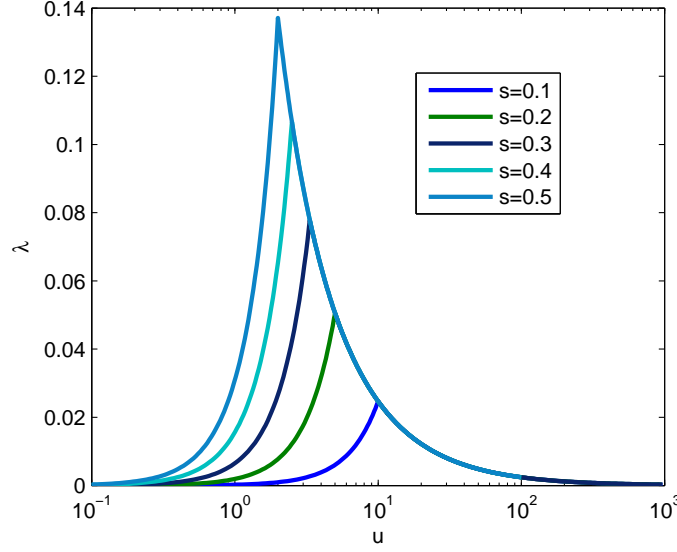


FIGURE 7.1 – Comparaison des solutions $\lambda(u)$ pour différentes compacités.

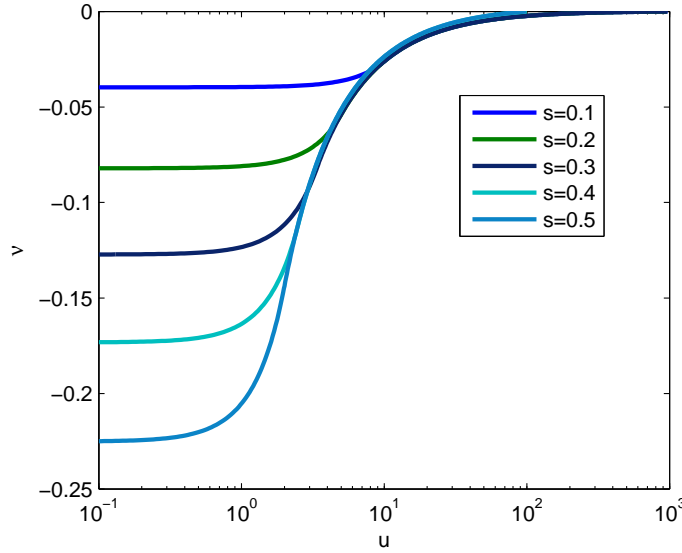


FIGURE 7.2 – Comparaison des solutions $\nu(u)$ pour différentes compacités.

Nous observons que les solutions sont identiques dans le vide quelque soit la compacité. En effet, à l'extérieur du corps, la compacité n'intervient plus dans les équations du champ gravitationnel de la métrique (cf. système (6.55), (6.54) et (6.56)). Remarquons que lorsque nous parlons de solution pour Sgr A*, cela implique que ces solutions soient des « monopoles ». Le champ doit tendre vers l'équilibre en 1 à l'infini, car il influence significativement les solutions. Si le champ ne tendait pas vers cet équilibre à l'infini, les solutions ne seraient pas asymptotiquement plates et d'énergie finie. Elles ne pourraient plus définir correctement une métrique. De plus, nous utilisons un algorithme de tir afin de déterminer la valeur du paramètre \mathcal{C} (voir eq. (6.44)) tel que la pression soit nulle sur le bord du corps.

A titre d'exemple, nous comparons les solutions obtenues pour une compacité de 0.2 avec les solutions de Schwarzschild correspondantes à la même masse ADM et la même compacité. La FIGURE 7.3 est une représentation de ces deux solutions et la FIGURE 7.4 représente le champ de Higgs correspondant à la solution Sgr A* « monopole ».

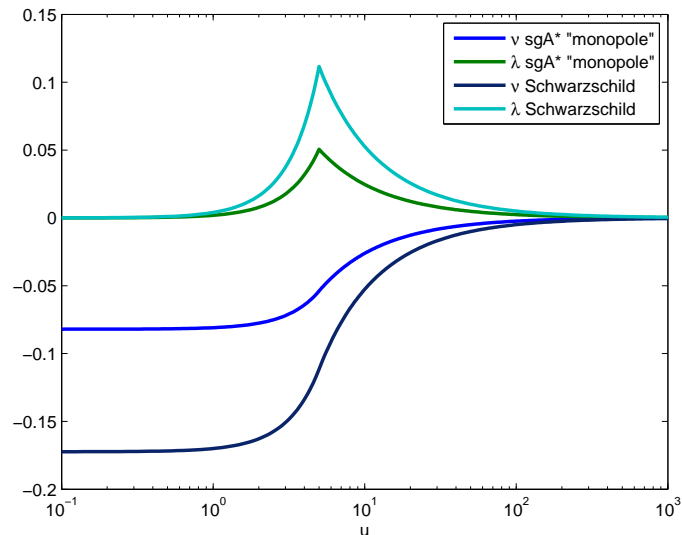


FIGURE 7.3 – Comparaison des solutions pour Schwarzschild et pour Sgr A* « monopole ».

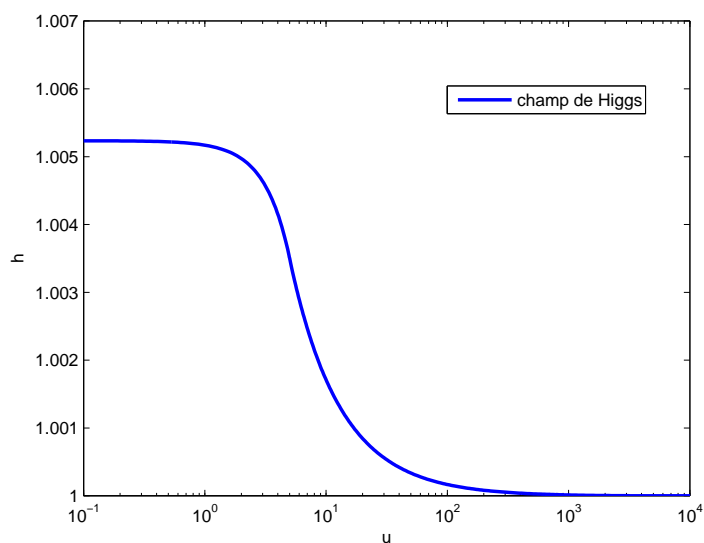


FIGURE 7.4 – Champ de Higgs pour Sgr A* « monopole ».

Nous observons à la FIGURE 7.3 que les coefficients de la métrique pour Sgr A* « monopole » sont plus petits que ceux issus de la métrique de Schwarzschild. Or, les deux objets avec lesquels nous avons calculé ces coefficients ont la même masse ADM. Ceci implique que la différence observée est uniquement due à la présence du champ de Higgs. Pour en avoir la certitude, nous devrions tracer les composantes du tenseur énergie impulsion pour l'alternative à Sgr A*.

7.2 Le paramètre de couplage

Nous illustrons maintenant quels changements peuvent engendrer une modification du paramètre de couplage ξ . Les FIGURES 7.5 et 7.6 représentent les solutions obtenues pour différentes valeurs de ξ pour une compacité de 0.2. Notons que lorsque nous modifions la valeur de ξ , nous devons aussi modifier la valeur de λ_{SM} afin de pouvoir intégrer correctement (en effet, avec une telle masse et une telle compacité, l'intégrateur est très sensible) et les autres paramètres sont identiques.

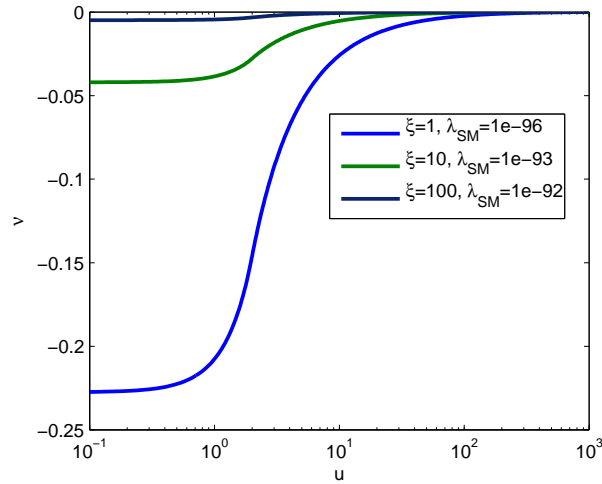


FIGURE 7.5 – Comparaison de $\nu(u)$ pour plusieurs ξ .

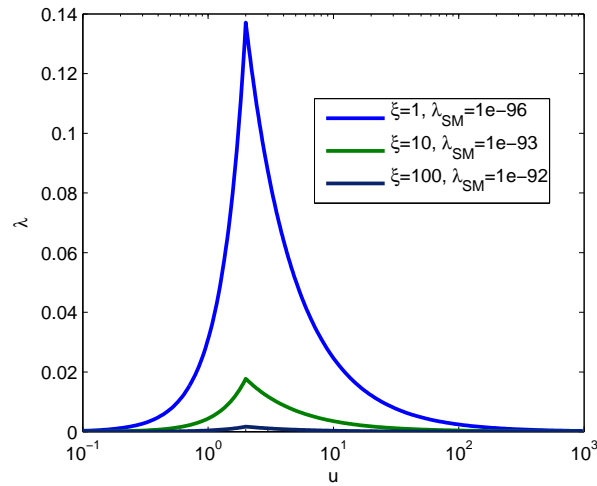


FIGURE 7.6 – Comparaison de $\lambda(u)$ pour plusieurs ξ .

Le FIGURE 7.7 représente les champs de Higgs associés à ces solutions.

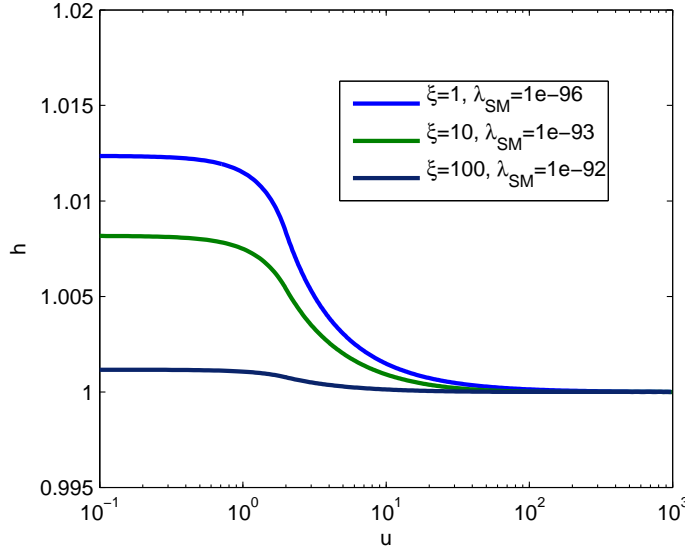


FIGURE 7.7 – Comparaison des champs de Higgs.

Nous remarquons que plus le paramètre ξ augmente, plus le champ tend à être constant (proche de 1 tout au long de l'intégration). Puisque la métrique dans ce cas est très influencée par les valeurs du champ, les coefficients ν et λ (FIGURES 7.5 et 7.6) varient de moins en moins lorsque ξ augmente.

7.3 La masse ADM

Identiquement à l'étude de la masse ADM produite dans les chapitres 3 et 6, nous analysons la masse ADM de l'objet que nous étudions ici (pour une compacité $s = 0.2$, $\xi = 1$ et $\lambda_{SM} = 10^{-96}$). La FIGURE 7.8 illustre la variation relative de la masse ADM (cf. (B.14) et section 3.8) de l'objet lors de l'intégration. Pour rappel, ce que nous appelons variation relative de la masse ADM est définie par $\delta\tilde{M} = (\tilde{M}_{ADM}(\bar{R} + \delta\bar{R}) - \tilde{M}_{ADM}(\bar{R})) / \tilde{M}_{ADM}(\bar{R})$. Avec \bar{R} la plus grande valeur radiale pour laquelle nous avons les solutions (lors de l'intégration) et $\delta\bar{R}$ l'écart entre 2 pas d'intégration.

Par soucis de concision, nous ne traçons pas l'évolution de la masse ADM durant l'intégration (celle-ci étant fort semblable à celle présentée à la FIGURE 6.8) et nous estimerons qu'elle vaut 2.2411×10^{63} GeV ou 3.9932×10^{36} kg.

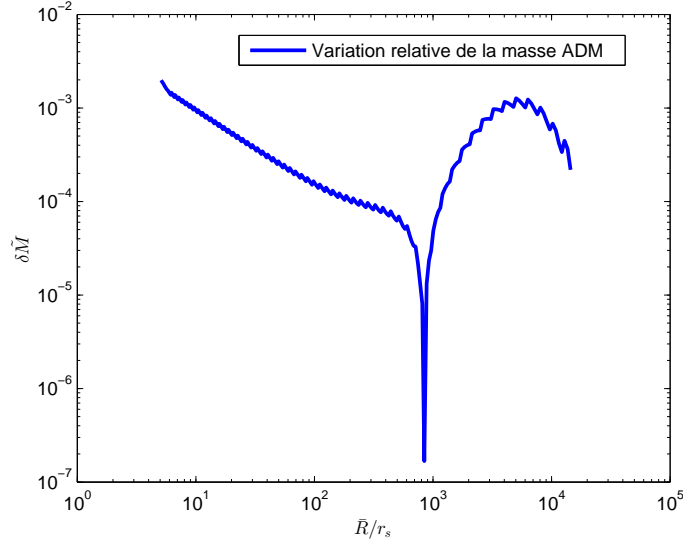


FIGURE 7.8 – Variation relative de la masse ADM pour Sgr A* « monopole ».

7.4 Comparaison des orbites matérielles avec Schwarzschild

Une façon intéressante de tester un modèle dans la pratique est l’observation des trajectoires d’objets astrophysiques dans l’espace-temps « prédit ». Avec le logiciel GYOTO ([25] et [26]), nous pouvons calculer et dessiner les géodésiques autour de l’objet Sgr A* « monopole » décrit ci-dessus. Nous en faisons l’étude ici pour un certain nombre de cas.

Nous comparons les géodésiques issues de l’espace-temps construit autour de Sgr A* « monopole » pour une compacité $s = 0.2$, $\xi = 1$, $\lambda_{SM} = 10^{-96}$ avec celles issues de l’espace-temps de Schwarzschild pour une même masse ADM et une même compacité.

Les FIGURES 7.9 et 7.10 représentent les géodésiques issues des deux espaces-temps étudiés en champ fort². Le cercle rouge, parfois réduit à un point, représente le rayon du corps central. Pour la FIGURE 7.9, les deux orbites partent du point $(100,0)$ en unités géométriques, nous dirons $r = 100r_s$, avec une vitesse angulaire orbitale $\Omega = 0.0007071067811/r_s$ (pour les unités voir l’annexe E). Cette vitesse correspond à une orbite circulaire stable en géométrie de Schwarzschild. Lorsque nous observons la trajectoire issue dans l’espace-temps associé à Sgr A* « monopole », nous remarquons que Ω est trop élevée pour avoir une orbite circulaire et que la trajectoire s’échappe. La FIGURE 7.10 a été construite à partir des conditions initiales suivantes : $r = 500r_s$ et $\Omega = 0.00005224555320/r_s$. Dans ce cas, les deux trajectoires forment une rosace. La trajectoire relative à Sgr A* « monopole » présente une avance du périastre $\delta\Phi = 36.62^\circ$, tandis que celle relative à Schwarzschild est telle que $\delta\Phi = 6.09^\circ$.

2. Nous parlons de champ fort lorsque l’orbite du corps a un rayon initial proche de l’objet central. Nous parlons de champ faible dans le cas contraire.

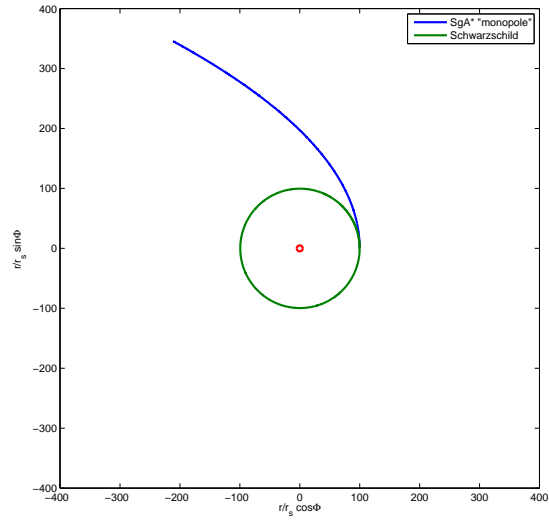


FIGURE 7.9 – Comparaison des orbites en champ fort : exemple 1.

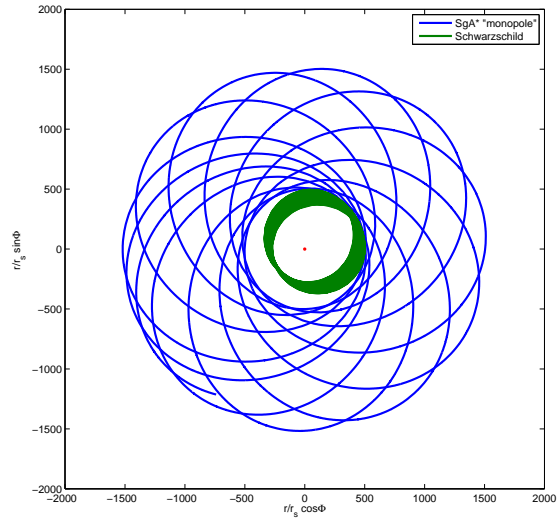


FIGURE 7.10 – Comparaison des orbites en champ fort : exemple 2.

A la FIGURE 7.11, nous observons les géodésiques issues des conditions initiales suivantes : $r = 20r_s$ et $\Omega = 0.0055/r_s$. L'avance du périastre pour la géodésique relative à l'espace-temps de Schwarzschild est telle que $\delta\Phi = 50.38^\circ$ tandis que pour celle dans l'espace-temps autour Sgr A* « monopole », nous avons $\delta\Phi = 9.54^\circ$.

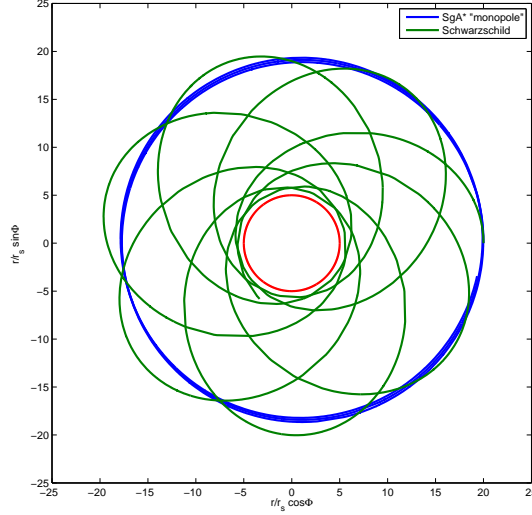


FIGURE 7.11 – Comparaison des orbites en champ fort : exemple 3.

Pour conclure sur les orbites en champ fort, nous dirons que celles-ci sont très différentes selon l'espace-temps et que ce n'est pas du tout étonnant au vu des coefficients de la métrique (voir FIGURE 7.3).

Passons maintenant aux géodésiques en champ faible. La FIGURE 7.12 représente les géodésiques pour les mêmes espaces-temps que précédemment avec pour conditions initiales : $r = 1000r_s$ et $\Omega = 0.000005/r_s$. Les orbites forment une rosace dans les deux cas. Pour ce qui est de l'avance du périastre, pour Schwarzschild nous avons $\delta\Phi = 6.95^\circ$ et pour Sgr A* « monopole », $\delta\phi = 9.96^\circ$. L'entièreté de l'orbite n'a pas été tracée par souci de visibilité.

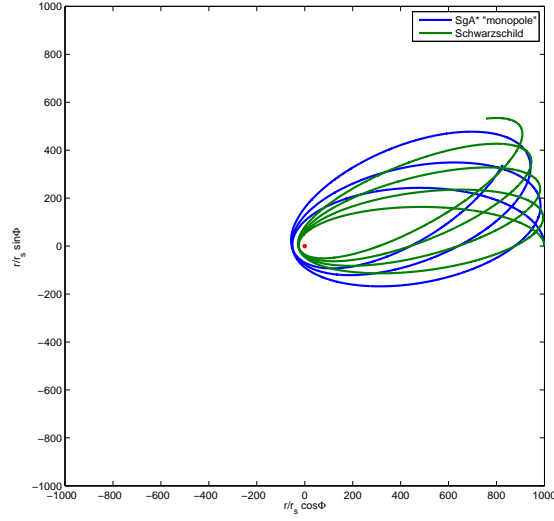


FIGURE 7.12 – Comparaison des orbites en champ faible : exemple 1.

La FIGURE 7.13 représente les géodésiques pour $r = 5000r_s$ et $\Omega = 0.0000004/r_s$.

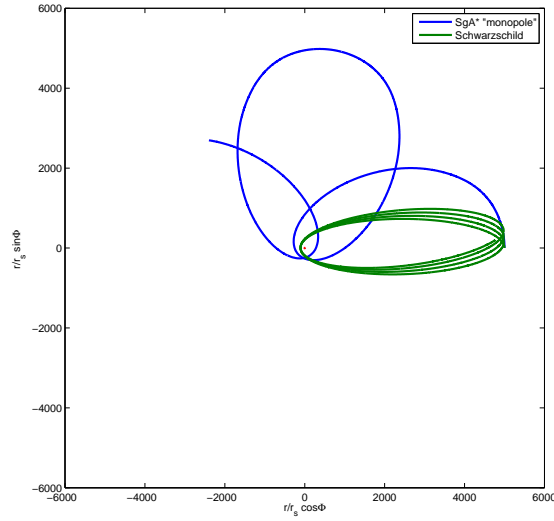


FIGURE 7.13 – Comparaison des orbites en champ faible : exemple 2.

Nous observons une avance du périastre pour Schwarzschild telle que $\delta\Phi = 1.71^\circ$ et pour Sgr A* « monopole », nous avons $\delta\Phi = 66.45^\circ$.

En champ faible (FIGURES 7.12 et 7.13), il est possible de trouver des orbites fort semblables avec une avance du périastre du même ordre et il est aussi possible de trouver des orbites totalement différentes comme en champ fort (FIGURES 7.9, 7.10 et 7.11). Nous pouvons terminer en disant qu'en champ fort, les orbites sont plus sensibles aux conditions initiales (r et Ω). Afin de savoir exactement pourquoi nous observons de tels comportements, il faudrait étudier de façon détaillée les composantes du tenseur énergie-impulsion pour le modèle Sgr A* « monopole ».

7.5 Comparaison des géodésiques lumières avec Schwarzschild

Nous présentons brièvement les différences au niveau des effets de lentilles gravitationnelles qui existent entre l'espace-temps de Schwarzschild et celui engendré par l'alternative à Sgr A*. Pour ce faire, nous opérons comme au chapitre 4 et nous utilisons GYOTO pour intégrer les photons émis par une étoile aux alentours du corps central. Nous illustrons ceci en plaçant une étoile de rayon $5r_s$ à $15r_s$ du corps central et juste derrière ce dernier. La FIGURE 7.14 représente ce que nous observerions dans un espace-temps de Schwarzschild et la FIGURE 7.15 représente ce que nous verrions dans l'espace-temps élaboré autour de l'alternative à Sgr A*. La masse ADM des corps centraux est identique dans les deux cas (cf. section précédente).

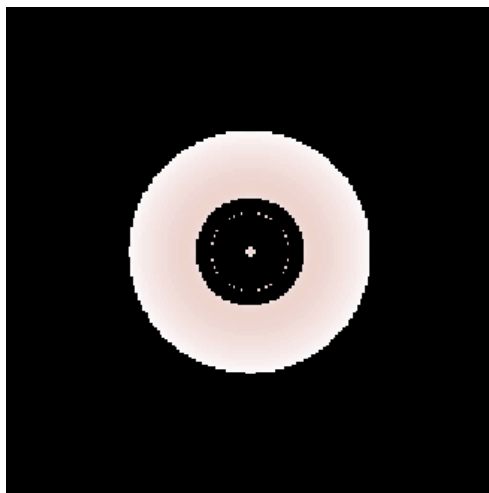


FIGURE 7.14 – Comparaison des géodésiques de genre lumière dans l'espace-temps de Schwarzschild : exemple 1

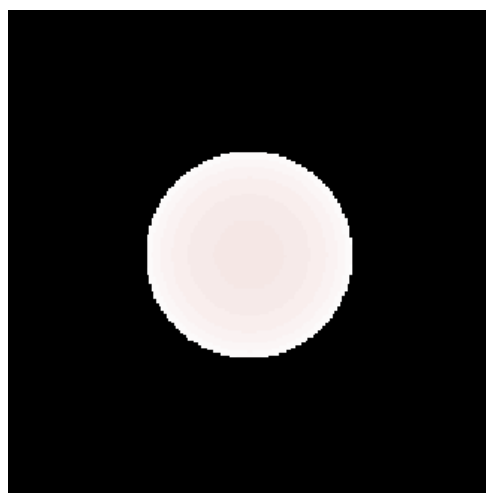


FIGURE 7.15 – Comparaison des géodésiques de genre lumière dans l'espace-temps autour de l'alternative à Sgr A* : exemple 1.

Nous observons que l'anneau d'Einstein présent sur la FIGURE 7.14 ne l'est plus sur la FIGURE 7.15. Ceci serait dû à la présence du champ de Higgs pour la seconde figure. Comme présenté à la FIGURE 7.3, la présence du champ de Higgs a tendance à aplatir la métrique et à la rendre moins relativiste (presque plate). De plus, nous observons l'étoile en entier parce que le corps

au centre est transparent. Pour accentuer cet effet, nous montrons ce que nous observerions si une étoile de rayon $0.5r_s$ à une distance de $15r_s$ était placée juste derrière le corps central. Les FIGURES 7.16 et 7.17 représentent cette scène pour les deux espace-temps considérés. La masse ADM du corps central est identique dans les deux cas.

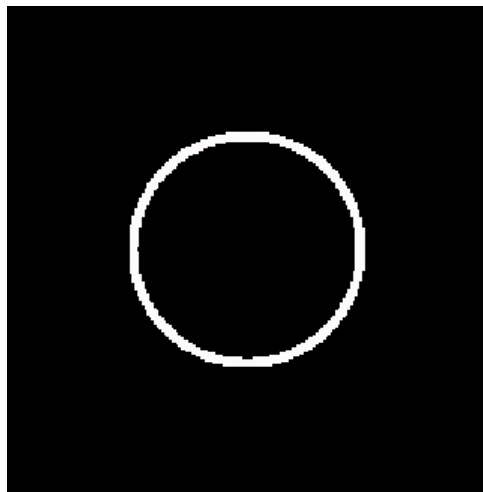


FIGURE 7.16 – Comparaison des géodésiques de genre lumière dans espace-temps de Schwarzschild : exemple 2

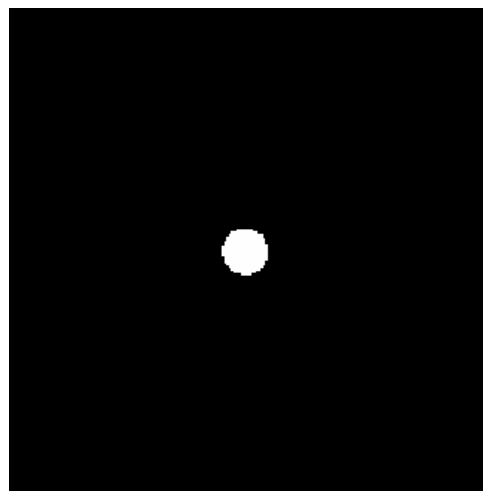


FIGURE 7.17 – Comparaison des géodésiques de genre lumière dans espace-temps autour de l'alternative à Sgr A* : exemple 2.

Pour conclure ce chapitre, nous dirons que globalement le champ de Higgs a tendance à aplatir la métrique et à la rendre moins relativiste (l'espace-temps n'est presque plus courbé par la masse). Afin de confirmer notre idée, il faudrait étudier plus en détail les composantes du tenseur énergie-impulsion afin de mettre en évidence les termes qui influencent la dynamique. Notons que ce sont les observations des orbites autour de Sgr A* qui ont pu mettre en évidence sa masse. Or, nous avons vu que le champ de Higgs avait un effet sur la métrique, et donc sur les orbites. Pour être en accord avec la réalité, il faudrait adapter le modèle pour que notre alternative engendre des orbites identiques à celles observées (*i.e.* il faut modifier la masse ADM).

Le modèle que nous avons étudié n'est pas assez complet pour constituer une alternative plausible au trou noir Sgr A*. Pour que le modèle soit plus réaliste et corresponde mieux aux observations, il faudrait y inclure la rotation de l'objet central. Ce qui nous mène au dernier chapitre de ce mémoire consacré à l'étude des monopoles de Higgs en rotation. Concrètement, nous y reprenons le modèle étudié dans le chapitre 6 et nous y incluons la rotation. Nous introduisons une métrique adaptée à ce changement et nous écrivons les équations du champ gravitationnel sous forme d'opérateurs du second ordre.

Chapitre 8

Les monopoles de Higgs en rotation

Dans ce chapitre, nous présentons la démarche qui nous a permis d'obtenir les équations du champ gravitationnel et du champ de Higgs pour les monopoles en rotation (cas stationnaire et axisymétrique). Tous les calculs de ce chapitre ont été effectués à l'aide du logiciel SAGE [5] et de son extension SageManifolds [16]¹.

8.1 Le contexte général

Pour décrire l'espace-temps autour d'un monopole en rotation, nous utilisons la métrique en coordonnées quasi-isotropes [14] :

$$ds^2 = (B^2 r^2 \sin^2 \theta \omega^2 - N^2) dt^2 + A^2 dr^2 + A^2 r^2 d\theta^2 + B^2 r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - 2B^2 r^2 \omega \sin^2 \theta d\phi dt \quad (8.1)$$

avec A , B , ω et N des fonctions de r et θ . Rappelons que t est la coordonnée en temps telle que $t \in \mathbb{R}$, r est la coordonnée radiale telle que $r \in \mathbb{R}^+$, θ est la colatitute telle que $\theta \in [0, \pi]$ et ϕ est la longitude telle que $\phi \in [0, 2\pi]$.

Nous avons aussi :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} B^2 r^2 \omega^2 \sin^2 \theta - N^2 & 0 & 0 & -B^2 r^2 \omega \sin^2 \theta \\ 0 & A^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^2 r^2 & 0 \\ -B^2 r^2 \omega \sin^2 \theta & 0 & 0 & B^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

et

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -N^{-2} & 0 & 0 & -\frac{\omega}{N^2} \\ 0 & A^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^{-2} r^{-2} & 0 \\ -\frac{\omega}{N^2} & 0 & 0 & (Br \sin \theta)^{-2} - \frac{\omega^2}{N^2} \end{pmatrix}.$$

Cette métrique est la plus adaptée au cas stationnaire et axisymétrique [14]. L'espace-temps est totalement défini par les fonctions A , B , ω et N .

1. Plus d'informations sur SAGE et SageManifolds dans l'annexe D

Remarquons que cette métrique dépend de quatre fonctions de deux variables contrairement à la métrique que nous avons utilisé pour décrire les équations du champ gravitationnel en géométrie Schwarzschild qui présentait deux fonctions d'une seule variable.

Nous supposons que la densité du corps est constante et telle que :

$$\rho(r < R) \equiv \rho_0 \quad (8.2)$$

et

$$\rho(r > R) = 0 \quad (8.3)$$

avec R le rayon du corps tel que $R = R(\theta)$. Le lagrangien associé à cette configuration est identique au cas sans rotation (cf. chapitre 7, équation (6.2)).

8.2 Les équations du champ gravitationnel

Puisque les éléments de la métrique dépendent à la fois de r et de θ , nous ne pouvons plus utiliser le formalisme lagrangien à une variable pour dériver les équations du champ gravitationnel.

Nous utilisons alors les équations d'Einstein pour écrire ces équations :

$$\left(1 + \frac{\xi}{m_{pl}^2} H^2\right) G_{\mu\nu} = \kappa \left[T_{\mu\nu}^{(H)} + T_{\mu\nu}^{(\xi)} + T_{\mu\nu}^{(mat)} \right], \quad (8.4)$$

avec $G_{\mu\nu}$ le tenseur d'Einstein et

$$T_{\mu\nu}^{(H)} = \partial_\mu H \partial_\nu H - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [(\partial H)^2 + 2V(H)] \quad (8.5)$$

$$T_{\mu\nu}^{(\xi)} = -\frac{\xi}{4\pi} \left[g_{\mu\nu} \nabla^\lambda (H \nabla_\lambda H) - \nabla_\mu (H \nabla_\nu H) \right] \quad (8.6)$$

$$T_{\mu\nu}^{(mat)} = (\rho + P) u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu} P. \quad (8.7)$$

Les éléments composants ces expressions sont définis dans le chapitre 6. Les expressions analytiques de ces tenseurs sont données dans l'annexe C.

Nous avons utilisé le logiciel SageManifolds [16] ainsi que [14] pour établir les équations du champ gravitationnel. Afin de rendre plus lisibles ces équations, nous les écrivons sous forme d'opérateurs du second ordre. Ceux-ci sont listés ci-dessous :

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (8.8)$$

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (8.9)$$

$$\tilde{\Delta}_3 = \Delta_3 - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} I \quad (8.10)$$

où I désigne l'opérateur identité.

La première équation s'obtient avec la combinaison linéaire suivante : $NBr \sin \theta G_{11} + \frac{BN}{r} \sin \theta G_{22}$ [14]. Nous nous servons du système (8.4) pour écrire :

$$\begin{aligned} \Delta_2 [(NB - 1)r \sin \theta] F(H) = \\ NBr \sin \theta \kappa \left[-2V(H)A^2 + 2PA^2 - \frac{\xi H}{2\pi B} \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{\xi}{4\pi} \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)^2 - \frac{\xi H}{4\pi} \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} - \frac{\xi H}{2\pi N} \frac{\partial H}{\partial r} \frac{\partial N}{\partial r} \right. \\ \left. - \frac{3\xi H}{4\pi r} \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{\xi H}{2\pi r^2 \tan \theta} \frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{\xi H}{2\pi r^2 B} \frac{\partial B}{\partial \theta} \frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{\xi}{4\pi r^2} \left(\frac{\partial H}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{\xi H}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} - \frac{\xi H}{2\pi r^2 N} \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial N}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Pour la seconde équation, nous utilisons $\frac{A^2}{r^2 B^2 \sin^2 \theta} G_{33}$ [14] pour écrire :

$$\begin{aligned} \Delta_2 (\log A + \log N) F(H) = \\ \kappa \left[-V(H)A^2 + PA^2 - \frac{\xi}{4\pi} \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)^2 - \frac{\xi H}{4\pi} \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} - \frac{\xi H}{4\pi N} \frac{\partial H}{\partial r} \frac{\partial N}{\partial r} - \frac{\xi H}{4\pi r} \frac{\partial H}{\partial r} \right. \\ \left. - \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial H}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{\xi}{4\pi r^2} \left(\frac{\partial H}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{\xi H}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} - \frac{\xi H}{4\pi r^2 N} \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial N}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Pour la troisième équation, nous prenons la combinaison : $(g^{\mu\nu} + 2n^\mu n^\nu) G_{\mu\nu} A^2/2$ [14], avec $n_\mu = (-N, 0, 0, 0)$ et $n^\mu = (1/N, 0, 0, \omega/N)$, le vecteur \vec{n} est le vecteur normal unitaire défini en (1.26). En nous servant de (8.4), nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \Delta_3 (\log N) F(H) = \frac{\kappa}{2} \left[-\frac{Pr^2 A^2 B^2 \sin^2 \theta \omega^2}{N^2} - \frac{r^2 \rho A^2 B^2 \sin^2 \theta \omega^2}{N^2} + 3PA^2 + \rho A^2 - 2A^2 V(H) \right. \\ \left. - \frac{\xi H}{4\pi B} \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{\xi}{4\pi} \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)^2 - \frac{\xi H}{4\pi} \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} - \frac{3\xi H}{4\pi N} \frac{\partial H}{\partial r} \frac{\partial N}{\partial r} - \frac{\xi H}{2\pi r} \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{\xi H}{4\pi r^2 \tan \theta} \frac{\partial H}{\partial \theta} \right. \\ \left. - \frac{\xi H}{4\pi r^2 B} \frac{\partial B}{\partial \theta} \frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{\xi}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} - \frac{\xi}{4\pi r^2} \left(\frac{dH}{d\theta} \right)^2 - \frac{3\xi H}{4\pi r^2 N} \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial N}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Pour la quatrième et dernière équation nous utilisons la combinaison $(G_{30}n^0 + G_{33}n^3) \frac{2NA^2}{B^2 r \sin \theta}$ [14] pour écrire :

$$\tilde{\Delta}_3 (\omega r \sin \theta) F(H) = -\frac{\kappa \xi H \sin(\theta)}{4\pi} \left[r \frac{\partial H}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right]. \quad (8.14)$$

8.3 L'équation du champ

L'équation de Klein-Gordon est définie en (6.46), complète les équations du champ gravitationnel pour décrire l'espace-temps. Nous l'écrivons ici en coordonnées quasi-isotropes. Pour commencer, nous avons :

$$\square H = \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{A^2 N} \frac{\partial H}{\partial r} \frac{\partial N}{\partial r} + \frac{2}{r A^2} \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{1}{r^2 A^2} \frac{\partial^2 H}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2 A^2 B} \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 A^2 N} \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial N}{\partial r}. \quad (8.15)$$

En tout, l'équation (6.46) se réécrit comme :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{A^2 N} \frac{\partial H}{\partial r} \frac{\partial N}{\partial r} + \frac{2}{r A^2} \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{1}{r^2 A^2} \frac{\partial^2 H}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2 A^2 B} \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial \theta} \\ & + \frac{1}{r^2 A^2 N} \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial N}{\partial r} + \frac{r^2 \xi B^2 H \sin^2 \theta}{16 \pi A^2 N^2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 + \frac{\xi B^2 H \sin^2 \theta}{16 \pi A^2 N^2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\xi H}{4 \pi A^4} \left(\frac{\partial A}{\partial r} \right)^2 - \frac{\xi H}{4 \pi A^3} \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} \\ & - \frac{\xi H}{4 \pi A^2 B} \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} - \frac{\xi H}{4 \pi A^2 B N} \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\partial N}{\partial r} - \frac{\xi H}{4 \pi A^2 N} \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} - \frac{\xi H}{4 \pi r A^3} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{3 \xi H}{4 \pi r A^2 B} \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{\xi H}{2 \pi r A^2 N} \frac{\partial N}{\partial r} \\ & + \frac{\xi H}{4 \pi r^2 A^4} \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{\xi H}{4 \pi r^2 A^3} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} - \frac{\xi H}{2 \pi r^2 A^2 B \tan \theta} \frac{\partial B}{\partial \theta} - \frac{\xi H}{4 \pi r^2 A^2 B} \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2} - \frac{\xi H}{4 \pi r^2 A^2 N \tan \theta} \frac{\partial N}{\partial \theta} \\ & - \frac{\xi H}{4 \pi r^2 A^2 N B} \frac{\partial B}{\partial \theta} \frac{\partial N}{\partial \theta} - \frac{\xi H}{4 \pi r^2 A^2 N} \frac{\partial^2 N}{\partial \theta^2} = -\lambda_{SM} v^2 H + \lambda_{SM} H^3. \quad (8.16) \end{aligned}$$

Remarque : Avant de calculer ces équations avec le logiciel SageManifolds, nous avons ré-écrit et vérifié tous les calculs relatifs aux monopoles de Higgs avec cet outil. Toutes les démarches ont été faites étape par étape et des techniques de vérification ont été appliquées. Nous avons également reproduit les équations du champ gravitationnel pour une étoile en rotation présentées dans [14] afin de vérifier nos calculs.

8.4 Les perspectives

L'étape suivante d'une telle démarche serait d'intégrer le système d'équations aux dérivées partielles obtenu avec un logiciel tel que LORENE [18]. Après, il serait intéressant d'étudier les géodésiques dans l'espace-temps obtenu. Nous pourrions les comparer avec celles issues de l'espace temps de Schwarzschild mais cette fois pour un objet en rotation. Nous pourrions aussi étudier les effets de lentille gravitationnelle produits par un monopole en rotation avec le logiciel GYOTO. Et pourquoi pas par la suite, compléter notre début d'alternative à Sagittarius A*.

Conclusion

Ce mémoire est le résumé des résultats principaux que j'ai obtenus durant mon travail d'initiation à la recherche. Ce travail est assez complet dans le sens où nous avons commencé par étudier un espace-temps standard autour d'un objet statique, à symétrie sphérique et non chargé, ce qui est assez simple pour commencer (ce sont les solutions de Schwarzschild). Nous avons dérivé les équations d'Einstein associées à cette configuration de deux manières différentes. De plus, nous les avons intégrées analytiquement et numériquement. À partir des solutions analytiques, nous avons étudié théoriquement les géodésiques d'objets autour du corps central et nous les avons tracées à l'aide du logiciel GYOTO. Nous avons aussi développé la masse ADM analytique de cet objet dans les coordonnées adaptées et ensuite, nous en avons étudié l'erreur lors de son approximation pendant l'intégration numérique. Après, nous avons étudié un modèle de théorie tenseur-scalaire de la gravitation (issu de [11] sur les monopoles de Higgs). Nous avons dérivé les équations du champ gravitationnel et du champ de Higgs à partir du lagrangien donné dans la référence. Pour ce faire, nous avons utilisé une méthode basée sur le principe variationnel. Ensuite, nous avons résolu numériquement les équations différentielles obtenues. Les solutions décrivent l'espace-temps aux alentours de ces monopoles. Nous en avons étudié les propriétés et nous avons mis en évidence qu'il n'était guère différent de celui obtenu avec les solutions de Schwarzschild. Pour finir sur les monopoles, nous avons étudié pratiquement leurs masses ADM.

Nous avons ensuite adapté le modèle des monopoles de Higgs à un objet de masse et de compacité semblables à celles de Sagittarius A*, le trou noir central de notre galaxie. Nous avons obtenu l'espace-temps qui découle de ce nouveau modèle de la même manière que précédemment et nous l'avons comparé à celui de Schwarzschild au travers des géodésiques. Nous avons pu mettre en évidence les effets du champ de Higgs : lorsque la géodésique associée à un corps a une distance initiale proche de l'objet central, le champ de Higgs « repousse » l'objet et la trajectoire s'écarte de celle obtenue en R.G. (solution de Schwarzschild). Si la géodésique associée à un corps a une distance initiale loin de l'objet central, les effets du champ sont moins ressentis au départ et ils s'accroissent lorsque le corps en orbite se rapproche de l'objet central. Pour finir, le champ a tendance à « aplatir » la métrique et à la rendre moins relativiste (la masse ne déforme presque plus l'espace-temps). Afin de vérifier notre intuition, il faudrait faire une analyse plus poussée des composantes du tenseur énergie-impulsion. Ce modèle est en quelque sorte un début d'alternative au trou noir Sagittarius A*. Il doit être complété car des observations astrophysiques ont mis en évidence que l'objet au centre de notre galaxie était en rotation. Ce qui nous mène au dernier sujet traité dans ce mémoire : les monopoles de Higgs en rotation. Pour mettre en évidence cette nouvelle facette, nous avons utilisé une métrique plus adaptée (métrique en coordonnées quasi-isotropes) et nous avons dérivé les équations des champs, non plus par le principe variationnel, mais avec les définitions des équations d'Einstein et de Klein-Gordon et à l'aide du logiciel SageManifolds. Une grande partie du travail a consisté à manipuler ces équations et à les mettre sous forme d'opérateurs du second ordre (approprié à un traitement par méthode spectrale). Pour le moment, ces équations ne sont pas résolues.

Il serait intéressant par la suite de résoudre les équations des champs pour les monopoles en rotation. Les logiciels LORENE et Kadath développés par le groupe ROC au sein du Luth (à l'Observatoire de Paris-Meudon) sont des outils avec lesquels il serait judicieux de les résoudre. Ceux-ci étant basés sur une méthode d'interpolation polynomiale (méthode spectrale), ils fonctionnent d'un point de vue méthode bien différemment de l'intégrateur prédéfini en Matlab **ode45** que nous avons utilisé dans ce mémoire (voir annexe D). Il serait bien entendu utile d'étudier l'influence du champ de Higgs à travers les géodésiques pour ces nouvelles solutions. De plus, le logiciel GYOTO permet de créer des images rendant compte des effets de lentille gravitationnelle sur une étoile dans un espace-temps donné (géodésiques de photons). Elles montrent ce qu'on pourrait observer dans la réalité. Quelques images de la sorte ont été produites pour le modèle de Schwarzschild et pour l'alternative à Sagittarius A*. Créer des images de ce genre pour l'espace-temps engendré par les monopoles en rotation serait instructif et intéressant car des expériences en rapport avec les effets de lentille gravitationnelle et de suivi des trajectoires des corps autour de Sagittarius A* sont en cours de développement. Elles permettront de tester la relativité générale autour de ce qui peut être le plus lourd objet compact que nous connaissons. Comme précisé plus haut, il serait intéressant d'étudier d'avantage les composantes du tenseur énergie-impulsion pour l'alternative à Sgr A* afin de confirmer notre intuition quant aux effets du champ de Higgs. Nous pourrions mettre en évidence quelle composante « aplati » la métrique.

L'espace-temps en relativité générale et les monopoles de Higgs furent étudiés à L'UNamur. Toute la partie relative aux géodésiques et au début d'alternative au trou noir Sagittarius A* a été étudiée à l'Observatoire de Paris site de Meudon. J'y ai réalisé mon stage de fin d'étude axé sur l'initiation à la recherche au sein de l'équipe ROC (pour Relativité et Objets Compacts) du Luth. Une grande partie de ce stage a consisté à apprendre à utiliser les différents logiciels cités dans ce mémoire (LORENE, GYOTO et SageManifolds) et à les utiliser sur les modèles que j'ai étudiés.

Annexes

Annexe A

Les tenseurs relatifs à la métrique en coordonnées aréolaires

Nous présentons ici les tenseurs élémentaires relatifs à la métrique aréolaire (A.1). Cette métrique est la plus générale et la plus adaptée lorsque nous travaillons en symétrie sphérique statique. Elle est utilisée tout au long de ce mémoire. L'élément de longueur est :

$$ds^2 = -e^{2\nu(r)} dt^2 + e^{2\lambda(r)} dr^2 + e^{2\mu(r)} d\Omega^2 \quad (\text{A.1})$$

avec $d\Omega^2$ l'angle solide infinitésimal tel que : $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$.

Les composantes covariantes de la métrique sont :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2\mu} \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

et les composantes contravariantes :

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-2\mu}}{\sin^2 \theta} \end{pmatrix}.$$

Rappelons que les éléments de cette métrique sont supposés indépendants du temps.

A.1 Les coefficients de connexion

Les coefficients de connexion non nuls associés à la métrique sont :

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \nu' & & \Gamma_{00}^1 = \nu'(r)e^{2(\nu-\lambda)} & & \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \mu' \\ \Gamma_{11}^1 = \lambda' & & \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta & & \Gamma_{22}^1 = -\mu(r)'e^{-2(\lambda-\mu)} \\ \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \mu' & & \Gamma_{33}^1 = -\mu(r)'e^{-2(\lambda-\mu)} \sin^2 \theta & & \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \end{aligned}$$

A.2 Le tenseur de Ricci

Les éléments non nuls de ce tenseur sont :

$$R_{00} = e^{2(\nu-\lambda)} \{ \nu'' + \nu' (\nu' - \lambda' + 2\mu') \}$$

$$R_{11} = -\nu'' - 2\mu'' + \nu' (\lambda' - \nu') + 2\mu' (\lambda' - \mu')$$

$$R_{22} = 1 + e^{-2(\lambda-\mu)} \{ -\mu'' - 2\mu'^2 + \mu' (\lambda' - \nu') \}$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta R_{22}.$$

A.3 Le scalaire de courbure

$$\mathcal{R} = -2 \left\{ e^{-2\lambda} [\nu'' + \nu' (\nu' + 2\mu' - \lambda') + 2\mu'' + 3\mu'^2 - 2\mu' \lambda'] - e^{-2\mu} \right\}.$$

A.4 Le tenseur d'Einstein

Les composantes non nulles de ce tenseur sont :

$$G_{00} = e^{-2\mu-2\lambda} (2e^{2\mu+2\nu} \lambda' \mu' - 3e^{2\mu+2\nu} \mu'^2 - 2e^{2\mu+2\nu} \mu'' + e^{2\lambda+2\nu})$$

$$G_{11} = e^{-2\mu} (e^{2\mu} \mu'^2 + 2e^{2\mu} \mu' \nu' - e^{2\lambda})$$

$$G_{22} = e^{-2\lambda} (e^{2\mu} \mu'^2 + e^{2\mu} \mu' \nu' + e^{2\mu} \nu'^2 - [e^{2\mu} \mu' + e^{2\mu} \nu'] \lambda' + e^{2\mu} \mu'' + e^{2\mu} \nu'')$$

$$G_{33} = \sin^2 \theta G_{22}.$$

Ces calculs ont été effectués à la main et à l'aide des références [4] (pp. 114-115) et [22].

Annexe B

La masse ADM

Nous donnons ici l'expression de la masse ADM lorsque nous travaillons en formalisme 3+1 et avec la métrique aréolaire en jauge de Schwarzschild ($e^{2\mu} = r^2$). Ces calculs ont été produits sur la base de [13] (pp. 162-166).

La masse ADM est définie par [13] :

$$M_{ADM} = \frac{1}{16\pi} \oint_{r=\infty} \left[\bar{\nabla}^j \gamma_{ij} - \bar{\nabla}_r f^{kl} \gamma_{kl} \right] s^i \sqrt{q} d^2 y \quad (\text{B.1})$$

avec f la 3-métrique plate sur chaque hypersurface Σ_t de la décomposition 3+1, $\bar{\nabla}$ la connexion associée à la métrique f (*i.e.* telle que $\bar{\nabla}_i f_{jk} = 0$), γ_{ij} la 3-métrique induite par la métrique d'espace-temps $g_{\mu\nu}$ dans les hypersurfaces Σ_t , s^i les composantes du vecteur unitaire normal à la surface et q la métrique induite sur les sphères $r = cste$.

Dans notre cas¹, nous avons :

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} e^{2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

En remaniant l'expression (B.1) et en l'adaptant à nos coordonnées, nous pouvons écrire :

$$M_{ADM} = \frac{1}{16\pi} \oint_{r=\infty} \left[\bar{\nabla}^j \gamma_{rj} - \bar{\nabla}_r f^{kl} \gamma_{kl} \right] r^2 \sin \theta d\theta d\phi. \quad (\text{B.2})$$

Nous avons :

$$f^{kl} \gamma_{kl} = \gamma_{11} + \frac{1}{r^2} \gamma_{22} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \gamma_{33}$$

ce qui donne

$$f^{kl} \gamma_{kl} = e^{2\lambda} + 2. \quad (\text{B.3})$$

Puisque nous travaillons avec un champ scalaire, la dérivée covariante devient une dérivée partielle.

Nous avons alors

$$\bar{\nabla}_r \left(f^{kl} \gamma_{kl} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(f^{kl} \gamma_{kl} \right) \quad (\text{B.4})$$

$$= 2\lambda' e^{2\lambda}. \quad (\text{B.5})$$

1. Rappelons que la métrique avec laquelle nous travaillons est décrite par $ds^2 = -e^{2\nu(r)} dt^2 + e^{2\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$.

Il nous reste alors à calculer :

$$\bar{\nabla}^j \gamma_{rj} = f^{ji} \bar{\nabla}_i \gamma_{rj} \quad (\text{B.6})$$

$$= \bar{\nabla}_r \gamma_{rr} + \frac{1}{r^2} \bar{\nabla}_\theta \gamma_{r\theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \bar{\nabla}_\phi \gamma_{r\phi}. \quad (\text{B.7})$$

En utilisant la définition de la dérivée covariante (1.2), nous pouvons calculer chaque terme de l'expression (B.7) :

$$\bar{\nabla}_r \gamma_{rr} = 2\lambda' e^{2\lambda}; \quad (\text{B.8})$$

$$\bar{\nabla}_\theta \gamma_{r\theta} = -r + r e^{2\lambda}; \quad (\text{B.9})$$

$$\bar{\nabla}_\phi \gamma_{r\phi} = r \left(e^{2\lambda} - 1 \right) \sin^2 \theta. \quad (\text{B.10})$$

Il est alors facile d'établir que

$$\bar{\nabla}^j \gamma_{rj} = 2 \left[\left(\lambda' + \frac{1}{r} \right) e^{2\lambda} - \frac{1}{r} \right]. \quad (\text{B.11})$$

Nous pouvons remplacer ces expressions dans la définition de la masse ADM (B.2) pour écrire :

$$M_{ADM} = \frac{1}{16\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{r=cst} \left\{ 2 \left[\left(\lambda' + \frac{1}{r} \right) e^{2\lambda} - \frac{1}{r} \right] - 2\lambda' e^{2\lambda} \right\} r^2 \sin \theta d\theta d\phi. \quad (\text{B.12})$$

Puisque

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi$$

nous pouvons conclure que

$$M_{ADM} = \frac{1}{8\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{r=cst} \left(e^{2\lambda} - 1 \right) r \sin \theta d\theta d\phi \quad (\text{B.13})$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(e^{2\lambda} - 1 \right). \quad (\text{B.14})$$

Rappelons que la fonction λ dépend aussi de r .

Annexe C

Les tenseurs énergie-impulsion pour les monopoles et les monopoles en rotation

Nous commençons par donner les composantes non nulles du tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ dans le cas des monopoles de Higgs. Rappelons que $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(mat)} + T_{\mu\nu}^{(H)} + T_{\mu\nu}^{(\xi)}$.

Nous commençons par les composantes du tenseur $T_{\mu\nu}^{(mat)}$:

$$T_{00}^{(mat)} = \rho e^{2\nu} \quad (C.1)$$

$$T_{11}^{(mat)} = P e^{2\lambda} \quad (C.2)$$

$$T_{22}^{(mat)} = P r^2 \quad (C.3)$$

$$T_{33}^{(mat)} = P r^2 \sin^2 \theta \quad (C.4)$$

la trace de ce tenseur est :

$$T^{(mat)} = 3P - \rho. \quad (C.5)$$

Puis pour $T_{\mu\nu}^{(H)}$:

$$T_{00}^{(H)} = \frac{1}{2} e^{2\nu-2\lambda} H'^2 + V e^{2\nu} \quad (C.6)$$

$$T_{11}^{(H)} = -V e^{2\lambda} + \frac{1}{2} H'^2 \quad (C.7)$$

$$T_{22}^{(H)} = -r^2 V - \frac{1}{2} r^2 H'^2 e^{-2\lambda} \quad (C.8)$$

$$T_{33}^{(H)} = (-r^2 V - \frac{1}{2} r^2 H'^2 e^{-2\lambda}) \sin^2 \theta \quad (C.9)$$

et la trace de ce tenseur est :

$$T^{(H)} = -(4V + H'^2 e^{-2\lambda}) \quad (C.10)$$

où le prime dénote la dérivée par rapport à r .

Le tenseur $T_{\mu\nu}^{(\xi)}$ a pour composantes non nulles :

$$T_{00}^{(\xi)} = -\frac{\xi e^{-2\lambda}}{4\pi r} [rHe^{2\nu}H'\lambda' - re^{2\nu}H'^2 - rHe^{2\nu}H'' - 2He^{2\nu}H'] \quad (C.11)$$

$$T_{11}^{(\xi)} = -\frac{(rH\nu' + 2H)\xi H'}{4\pi r} \quad (C.12)$$

$$T_{22}^{(\xi)} = (r^2HH'\lambda' - r^2H'^2 - r^2HH'' - (r^2H\nu' + rH)H') \frac{\xi e^{-2\lambda}}{4\pi} \quad (C.13)$$

$$T_{33}^{(\xi)} = (r^2HH'\lambda' - r^2H'^2 - r^2HH'' - (r^2H\nu' + rH)H') \frac{\xi e^{-2\lambda} \sin^2 \theta}{4\pi} \quad (C.14)$$

et la trace de ce tenseur est :

$$T^{(\xi)} = (rHH'\lambda' - rH'^2 - rHH'' - (rH\nu' + 2H)H') \frac{3\xi e^{-2\lambda}}{4\pi r}. \quad (C.15)$$

Nous donnons maintenant les composantes non nulles du tenseur énergie-impulsion dans le cas des monopoles en rotation.

Nous commençons par les éléments de $T_{\mu\nu}^{(mat)}$:

$$T_{00}^{(mat)} = -\rho(r^2B^2 \sin^2 \theta \omega^2 - N^2) \quad (C.16)$$

$$T_{03}^{(mat)} = T_{30}^{(mat)} = -Pr^2B^2 \sin^2 \theta \omega \quad (C.17)$$

$$T_{11}^{(mat)} = PA^2 \quad (C.18)$$

$$T_{22}^{(mat)} = Pr^2A^2 \quad (C.19)$$

$$T_{33}^{(mat)} = Pr^2B^2 \sin^2 \theta \quad (C.20)$$

et la trace de ce tenseur est

$$T^{(mat)} = \frac{\rho(r^2B^2 \sin^2 \theta \omega^2 - N^2) + P(r^2B^2 \sin^2 \theta \omega^2 + 3N^2)}{N^2}. \quad (C.21)$$

Continuons avec $T_{\mu\nu}^{(H)}$:

$$T_{00}^{(H)} = \frac{2A^2N^2V + N^2 \left(\frac{\partial H}{\partial r}\right)^2 + \frac{N^2}{r^2} \left(\frac{\partial H}{\partial \theta}\right)^2}{2A^2} - \frac{\left(2r^2A^2B^2V\omega^2 + r^2B^2\omega^2 \left(\frac{\partial H}{\partial r}\right)^2 + B^2\omega \left(\frac{\partial H}{\partial \theta}\right)^2\right) \sin^2 \theta}{2A^2} \quad (C.22)$$

$$T_{03}^{(H)} = T_{30}^{(H)} = \frac{(2r^2A^2B^2V\omega + r^2B^2\omega \left(\frac{\partial H}{\partial r}\right)^2 + B^2\omega \left(\frac{\partial H}{\partial \theta}\right)^2) \sin^2 \theta}{2A^2} \quad (C.23)$$

$$T_{11}^{(H)} = -A^2V + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial H}{\partial \theta}\right)^2 \quad (C.24)$$

$$T_{12}^{(H)} = T_{21}^{(H)} = \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial H}{\partial r} \quad (C.25)$$

$$T_{22}^{(H)} = -r^2 A^2 V - \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial \theta} \right)^2 \quad (\text{C.26})$$

$$T_{33}^{(H)} = - \left(\frac{2r^2 A^2 B^2 V + r^2 B^2 \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)^2 + B^2 \left(\frac{\partial H}{\partial \theta} \right)^2}{2A^2} \right) \sin^2 \theta \quad (\text{C.27})$$

et la trace de ce tenseur est

$$T^{(H)} = - \frac{4A^2 V + \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial H}{\partial \theta} \right)^2}{A^2}. \quad (\text{C.28})$$

Nous terminons avec $T_{\mu\nu}^{(\xi)}$:

$$\begin{aligned} T_{00}^{(\xi)} = \frac{\xi B^2 r^2}{4\pi A^2} & \left[\frac{H N^2}{r^2 B^3} \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{N^2}{r^2 B^2} \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)^2 + \frac{H N^2}{r^2 B^2} \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{2 H N^2}{r^3 B^2} \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{H N^2}{r^4 B^2 \tan \theta} \frac{\partial H}{\partial \theta} \right. \\ & + \frac{H N^2}{r^4 B^3} \frac{\partial B}{\partial \theta} \frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{N^2}{r^4 B^2} \left(\frac{\partial H}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{H N^2}{r^4 B^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} - \left(\omega^2 \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)^2 + H \omega^2 \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{H \omega^2}{N} \frac{\partial H}{\partial r} \frac{\partial N}{\partial r} \right. \\ & \left. \left. - H \omega \frac{\partial H}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{H \omega^2}{r} \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\omega^2}{r^2} \left(\frac{\partial H}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{H \omega^2}{r^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} + \frac{H \omega^2}{r^2 N} \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial N}{\partial \theta} - \frac{H \omega}{r^2} \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) \sin^2 \theta \right] \quad (\text{C.29}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{03}^{(\xi)} = T_{30}^{(\xi)} = \frac{\xi B^2 \sin^2 \theta}{8\pi A^2 N} & \left[2r^2 N \omega \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)^2 + 2r^2 H N \omega \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + 2r^2 H \omega \frac{\partial H}{\partial r} \frac{\partial N}{\partial r} \right. \\ & - r^2 H N \frac{\partial H}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + 2r H N \omega \frac{\partial H}{\partial r} + 2N \omega \left(\frac{\partial H}{\partial \theta} \right)^2 + 2H N \omega \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} + 2H \omega \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial N}{\partial \theta} \\ & \left. - N H \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right] \quad (\text{C.30}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{11}^{(\xi)} = \frac{\xi}{4\pi r^2 A B N} & \left[-r^2 B N H \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial r} - r^2 A H N \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial r} - r^2 A B H \frac{\partial H}{\partial r} \frac{\partial N}{\partial r} \right. \\ & - 2r A B H N \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{A B H N}{\tan \theta} \frac{\partial H}{\partial \theta} + B H N \frac{\partial A}{\partial \theta} \frac{\partial H}{\partial \theta} - A H N \frac{\partial B}{\partial \theta} \frac{\partial H}{\partial \theta} - A B N \left(\frac{\partial H}{\partial \theta} \right)^2 \\ & \left. - A B H N \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} - A B H \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial N}{\partial \theta} \right] \quad (\text{C.31}) \end{aligned}$$

$$T_{12}^{(\xi)} = T_{21}^{(\xi)} = \frac{\xi}{4\pi A} \left[-H \frac{\partial A}{\partial \theta} \frac{\partial H}{\partial r} + A H \frac{\partial^2 H}{\partial r \partial \theta} - H \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial \theta} + A \frac{\partial H}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{A H}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta} \right] \quad (\text{C.32})$$

$$\begin{aligned} T_{22}^{(\xi)} = \frac{\xi}{4\pi} & \left[\frac{r^2 H}{A} \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{r^2 H}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial r} - r^2 \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)^2 - r^2 H \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} \right. \\ & \left. - \frac{r^2 H}{N} \frac{\partial H}{\partial r} \frac{\partial N}{\partial r} - r H \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{H}{\tan \theta} \frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{H}{A} \frac{\partial A}{\partial \theta} \frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{H}{B} \frac{\partial B}{\partial \theta} \frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{H}{N} \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial N}{\partial \theta} \right] \quad (\text{C.33}) \end{aligned}$$

$$T_{33}^{(\xi)} = -\frac{B^2 \xi \sin^2 \theta}{4\pi A^2 N} \left[r^2 N \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)^2 + r^2 H N \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + r^2 H \frac{\partial H}{\partial r} \frac{\partial N}{\partial r} + r H N \frac{\partial H}{\partial r} \right. \\ \left. + N \left(\frac{\partial H}{\partial \theta} \right)^2 + H N \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} + H \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial N}{\partial \theta} \right] \quad (\text{C.34})$$

et la trace de ce tenseur est :

$$T^{(\xi)} = -\frac{3\xi}{4\pi A^2 r^2} \left[-\frac{r^2 H}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial r} - r^2 \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)^2 - r^2 H \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} - \frac{r^2 H}{N} \frac{\partial H}{\partial r} \frac{\partial N}{\partial r} - 2r H \frac{\partial H}{\partial r} \right. \\ \left. - \frac{H}{\tan \theta} \frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{H}{B} \frac{\partial B}{\partial \theta} \frac{\partial H}{\partial \theta} - \left(\frac{\partial H}{\partial \theta} \right)^2 - H \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} - \frac{H}{N} \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial N}{\partial \theta} \right]. \quad (\text{C.35})$$

Annexe D

Les logiciels utilisés

D.1 Matlab

Le logiciel Matlab est utilisé tout au long de ce mémoire, en grande partie pour intégrer les équations du champ gravitationnel et du champ pour les monopoles de Higgs. Pour ce faire, nous avons utilisé la fonction **ode45**. Celle-ci permet l'intégration d'équations différentielles ordinaires. Elle est basée sur la méthode d'intégration Runge-Kutta-Merson imbriquée d'ordre 4 et 5. Cette fonction est basée sur le schéma suivant [32] :

$$y' = f(x, y) \text{ et } y(0) = y_0 \text{ donné}$$

on pose :

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}k_1) \\ k_3 &= hf(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{6}k_2) \\ k_4 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{8}k_1 + \frac{3}{8}k_3) \\ k_5 &= hf(x_n + h, y_n + \frac{1}{2}k_1 - \frac{3}{2}k_3 + 2k_4). \end{aligned}$$

La formule qui donne l'étape suivante pour l'intégration est

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_4 + \frac{1}{6}k_5 + \mathcal{O}(h^5)$$

avec $n \in \mathbb{N}$, h le pas d'intégration, y_n l'évaluation de l'intégrale à l'étape courante et $x_n = n \times h$.

Nous avons utilisé la toolbox symbolique de Matlab pour produire l'expression des fonctions à intégrer. Le logiciel fût aussi utilisé pour créer des fichiers contenant l'expression de la métrique numérique pour faire fonctionner LORENE.

D.2 LORENE

LORENE signifie « Langage Objet pour la Relativité Numérique ». Ce logiciel a été développé au sein de l'équipe ROC du LUTH de l'Observatoire de Paris-Meudon. C'est un ensemble de programmes écrit en C++ permettant notamment de résoudre les équations d'Einstein pour une métrique donnée. Dans notre cas et puisque nous avons déjà résolu les équations d'Einstein avec Matlab, nous avons utilisé LORENE pour produire des fichiers contenant les métriques numériques et adaptés à GYOTO (voir ci-après). Une des caractéristiques importantes de LORENE est que les calculs, les graphes, etc sont basés sur une méthode d'interpolation polynomiale (méthode spectrale). LORENE est téléchargeable gratuitement via le site de l'Observatoire de Paris-Meudon :

<http://www.lorene.obspm.fr/>

D.3 GYOTO

GYOTO est aussi un logiciel développé par l'Observatoire de Paris-Meudon, GYOTO signifie « General relativitY Orbit Tracer of Observatoire de Paris ». C'est un logiciel qui permet de calculer les géodésiques dans un espace-temps donné. Toutes les orbites présentées dans ce mémoire sont issues de ce logiciel. Nous avons surtout utilisé l'extension GYOTOY car elle est plus intuitive que GYOTO, elle est plus facile à utiliser. En effet, après avoir importé le fichier numérique qui contient la métrique dans le logiciel, il suffit de faire varier les conditions initiales via quelques commandes (voir FIGURE D.1).

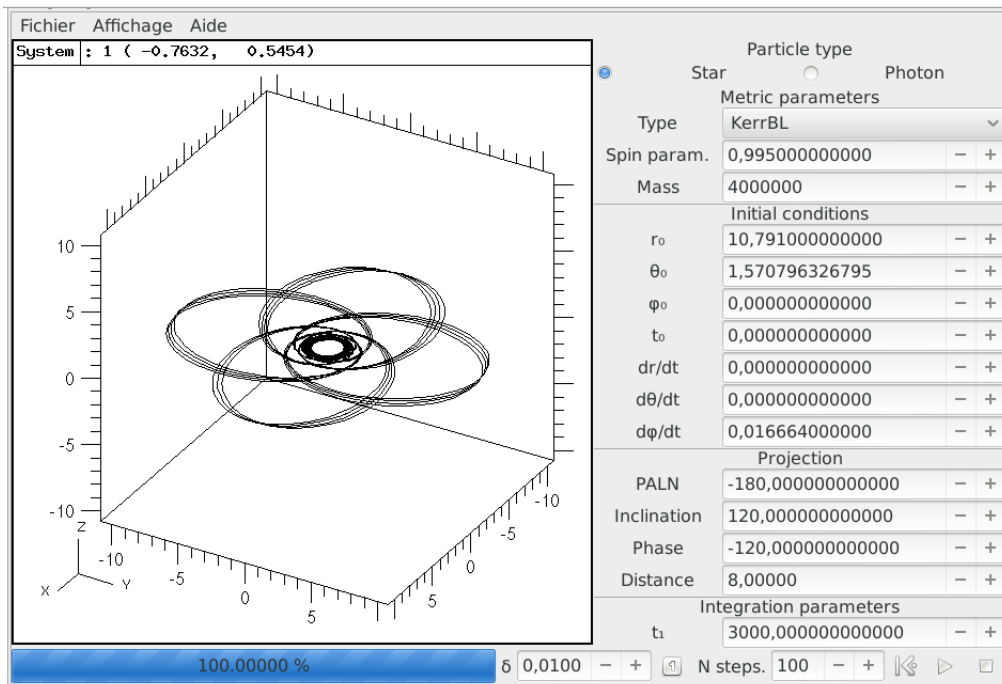


FIGURE D.1 – Interface de GYOTOY [27].

Goyto est également téléchargeable gratuitement via le site :

<http://gyoto.obspm.fr/>

D.4 SageManifolds

SageManifolds est un logiciel développé par l'Observatoire de Paris site de Meudon. C'est en fait une extension de SAGE (<http://www.sagemath.org/fr/>) qui est une alternative libre à Matlab, Maple, etc pour le calcul symbolique. L'extension « Manifolds » permet, comme son nom l'indique, de faire du calcul symbolique sur les variétés différentiables.

Nous l'avons principalement utilisé ici pour écrire les équations des champs pour les monopoles en rotation. Nous avons aussi vérifié les autres calculs faits « à la main » avec SAGE. L'extension Manifolds est disponible à l'adresse suivante :

<http://sagemanifolds.obspm.fr/>

Annexe E

Les unités utilisées

Nous expliquons ici quelles unités nous avons utilisées tout au long de ce mémoire. Pour commencer, nous définissons la notion de eV (électron-volt). Ensuite, nous distinguons les conventions utilisées en théorie des champs et en relativité générale. Après, nous discutons des unités qui apparaissent dans le mémoire.

E.1 L'électron-volt

Pour commencer, l'électron-volt (eV) est une unité de mesure de l'énergie. C'est en fait l'énergie acquise par un électron accéléré depuis le repos par une différence de potentiel de un volt. Un électron-volt est égal à $1,602176565 \times 10^{-19}$ joule (J). L'unité que nous utilisons le plus souvent ici est le GeV (giga-electron-volt), il vaut 10^9 eV. Cette unité est adaptée à la physique des particules.

E.2 En général

Notons les unités standards pour la constante de Planck \hbar , la vitesse de la lumière c et la constante de Newton G ¹[22] :

$$\begin{aligned}\hbar &= 1.05 \times 10^{-34} \text{m}^2 \text{s}^{-1} \text{kg} \\ [\hbar] &= \text{L}^2 \text{T}^{-1} \text{M}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c &= 3 \times 10^8 \text{ms}^{-1} \\ [c] &= \text{LT}^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G &= 6.67 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{s}^{-2} \text{kg}^{-1} \\ [G] &= \text{L}^3 \text{T}^{-2} \text{M}^{-1}.\end{aligned}$$

La masse de Planck est définie de la façon suivante :

$$m_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.177 \times 10^{-8} \text{kg}.$$

1. Comme annoncé au chapitre 5, la constante de Newton G n'est pas toujours constante dans les alternatives à la relativité générale. En effet, lorsque nous travaillons en gravitation modifiée elle est fonction d'un champ scalaire.

Si nous multiplions cette masse par c^2 , nous obtenons l'énergie de Planck :

$$\begin{aligned} E_{pl} &= m_{pl}c^2 \\ &= 1.96 \times 10^9 \text{ J} \\ &= 1.22 \times 10^{19} \text{ GeV} \end{aligned}$$

L'énergie de Planck est souvent identifiée à la masse de Planck (ce que nous faisons tout au long de ce mémoire). Nous montrons dans la section suivante comment écrire toutes les grandeurs physiques en unités de masse de Planck (*i.e.* en GeV).

E.3 Les unités en relativité générale et en théorie des champs

Nous distinguons ici les unités que nous utilisons en relativité générale et en théorie des champs. Dans ce mémoire, nous utilisons les unités adaptées à la théorie de champ (pour dériver les équations des champs en géométrie de Schwarzschild et pour les monopoles de Higgs), mais nous utilisons aussi les unités spécifiques à la relativité générale à travers les logiciels LORENE et GYOTO.

La relativité générale

Nous supposons que $G = c = 1$ (unités géométriques). Nous avons :

$$\begin{aligned} [G] &= \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \\ &= \text{L}^3 \text{M}^{-1} \text{T}^{-2} \\ [c] &= \text{LT}^{-1}. \end{aligned}$$

Puisque $G = c = 1$, $[\text{L}] = [\text{T}]$ et

$$\begin{aligned} 1 &= \text{L}^3 \text{M}^{-1} \text{T}^{-2} \\ &= \text{LM}^{-1} \text{L}^2 \text{T}^{-2} \\ &= \text{LM}^{-1}. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors écrire $[\text{L}] = [\text{M}] = [\text{T}]$ et les unités de longueur et de temps en relativité générale peuvent alors s'exprimer en GeV. Il est aussi intéressant d'écrire la constante de Planck dans ces unités :

$$\begin{aligned} [\hbar] &= \text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \\ &= \text{ML}^2 \text{T}^{-1} \\ &= \text{M}^2. \end{aligned}$$

Et donc $[\hbar] = \text{GeV}^2$.

La théorie des champs

Nous supposons ici que $\hbar = c = 1$. Dans ce cas, nous avons :

$$\begin{aligned} [\hbar] &= \text{Js} \\ &= \text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \\ &= \text{ML}^2 \text{T}^{-1} \\ [c] &= \text{LT}^{-1} \end{aligned}$$

Puisque $[c] = 1 \Rightarrow [\text{L}] = [\text{T}]$ et $[\hbar] = 1 \Rightarrow [\text{M}] = [\text{L}]^{-1}$. Nous écrivons alors les unités de longueur et de temps en théorie des champs comme : $[\text{L}] = [\text{T}] = \text{GeV}^{-1}$.

Il est aussi intéressant d'exprimer G en GeV :

$$\begin{aligned}
[G] &= \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \\
&= \text{L}^3 \text{M}^{-1} \text{T}^{-2} \\
&= \text{M}^{-3} \text{M}^{-1} \text{T}^{-2} \\
&= \text{M}^{-4} \text{T}^{-2}.
\end{aligned}$$

Il s'en suit que $[G] = \text{GeV}^{-2}$.

E.4 Récapitulatif

Récapitulons les unités et les conventions que nous avons utilisées pour les différentes parties de ce mémoire. Pour commencer, nous avons travaillé en théorie des champs pour écrire les équations du champ gravitationnel en géométrie de Schwarzschild, puis nous avons écrit ces équations et celle du champ de Higgs pour le modèle des monopoles. Afin de rendre les équations sans dimension, nous avons posé $u = r/r_s$. Lorsque nous parlons par exemple du rayon du corps central lorsque nous traçons les solutions, nous écrivons par exemple $R = 5r_s$.

Ensuite, puisque les logiciels utilisés pour tracer les géodésiques (GYOTO et LORENE) fonctionnent avec les unités géométriques (propres à la relativité générale), nous avons dû adapter nos unités. Nous expliquons ici seulement pourquoi, lorsque nous donnons une valeur de Ω pour vitesse angulaire orbitale initiale lors du calcul des géodésiques par GYOTO, nous la donnons en r_s^{-1} et non en radian par seconde. Commençons par rappeler la formule (4.33) :

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

avec M la masse du corps central, G la constant de Newton et r la distance du corps en orbite au corps central. Dans ce cas, Ω s'exprime en radian par seconde. Puisque nous avons posé $u = r/r_s$ pour intégrer, nous devons ré-exprimer Ω avec ces unités. Notons $\bar{\Omega}$ la variable Ω sans dimension que nous utilisons. Nous pouvons écrire Ω en fonction de $u = r/r_s$ et en tirer $\bar{\Omega}$:

$$\begin{aligned}
\Omega &= \sqrt{\frac{GM}{u^3 r_s^3}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2u^3 r_s^2}} \\
&= \frac{1}{r_s} \sqrt{\frac{1}{2u^3}}.
\end{aligned}$$

Puisque r_s est exprimé en unité de longueur et $[T] = [L]$ en théorie des champs. Pour rappel $r_s = \frac{2GM}{c^2}$. En théorie des champs, nous avons $r_s = 2GM$ puisque $c = 1$ et

$$\begin{aligned}
[r_s] &= [2] [G] [M] \\
&= \text{M}^{-4} \text{T}^{-2} \text{M} \\
&= \text{T}^4 \text{T}^{-2} \text{L}^{-1} \\
&= \text{T}^2 \text{L}^{-1} \\
&= \text{L}.
\end{aligned}$$

Nous pouvons conclure en écrivant $\bar{\Omega} = \sqrt{\frac{1}{2u^3}}$ et $[\Omega] = [\text{L}]^{-1} = [\text{T}]^{-1}$. Il est alors normal d'exprimer la valeur de Ω en « unité » de r_s^{-1} .

Bibliographie

- [1] Alimi J.-M., Füzfa A., *Albert Einstein century international conference*, Am. Ins. of Physics, décembre 2006
- [2] Bezrukov F.L. et Shaposhnikov M., *Standard Model Higgs boson mass from inflation*, Phys. Lett. B **659**, 703 (2008)
- [3] Brans C. et Dicke R.H., *Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation*, Phys. Rev. **124**, 925 (1961)
- [4] Bruneton J-P., *Gravitation relativiste et cosmologie*, département de Mathématique, 2011-2012
- [5] Casamayou A. et al., *Calcul mathématique avec SAGE*, Creative Commons, Mai 2013
- [6] Sophie Devillers, *Le monopole de Higgs : un air de particule, lourd comme un astéroïde*, La libre Belgique, 20 septembre 2013
- [7] Einsenstaedt J., *Avant Einstein, relativité, lumière, gravitation*, Seuil, Janvier 2005
- [8] Evrard V., *Memoire : Conditions d'équilibre d'un corps sphérique en théorie tenseur-scalaire de la gravitation*, FUNDP, juin 2012
- [9] Füzfa A., *Notes de cours : Variétés différentiables, géométrie riemannienne et calcul tensoriel*, FUNDP, 2010-2011
- [10] Füzfa A., Rinaldi M. et Schlögel S., *Article en construction : On Higgs Monopole*, Unamur, Janvier 2014
- [11] Füzfa A., Rinaldi M. et Schlögel S., *Particlelike distributions of the Higgs field nonminimally coupled to gravity*, Phys. Rev. Let. **111**, 121103 (2013)
- [12] Genzel R., Eisenhauer F., Gillessen S., *The Galactic Center massive black hole and nuclear star cluster*, Rev. of Mod. Phys., **82**, 3121 (2010)
- [13] Gourgoulhon E., *3+1 Formalism in General Relativity*, Springer, 2012
- [14] Gourgoulhon E., *An introduction to the theory of rotating relativistic stars*, <http://luth.obspm.fr/~luthier/gourgoulhon/pdf/rotstars.pdf>, arXiv :1003.5015, consulté le 5 mars 2013
- [15] Gourgoulhon E., *Relativité Générale*, <http://luth.obspm.fr/~luthier/gourgoulhon/fr/master/relatM2.pdf>, consulté le 10 février 2014
- [16] Gourgoulhon E., Bejger M., <http://sagemanifolds.obspm.fr/>, consulté le 24 mars 2013
- [17] Gourgoulhon E., *Trous noirs à la veille d'une nouvelle ère observationnelle*, L'Astronomie **125** pp. 16-25, novembre 2011
- [18] Gourgoulhon E., Grandclément P. et Novak J., <http://www.lorene.obspm.fr/>, consulté le 2 février 2014
- [19] Hobson M.P., Efstathouis G. et Lasenby A.N., *General Relativity. An introduction for physicists*, Cambridge University Press, 2006

- [20] Hoffman B., *La relativité, histoire d'une grande idée*, Belin pour la science, Janvier 2000
- [21] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.R., *Numerical recipes in Fortran The art of scientific computing*, Cambridge University Press, 1993
- [22] Schlögel S., *Mémoire : Approches de gravitation modifiée pour l'inflation cosmologique et les objets compacts*, FUNDP, juin 2012
- [23] Schlögel S., *Article en construction : Higgs Monopoles*, version juin 2013
- [24] Schomblond C. et Barnich G., *Introduction à la Relativité Générale*, <http://homepages.ulb.ac.be/~gbarnich/Relatgene.pdf>, consulté le 28 mars 2013
- [25] Vincent F.H., Gourgoulhon E. et Novak. J., *3+1 geodesic equation and images in numerical spacetimes*, Class. Quantum Grav. **29**, 225011(2011)
- [26] Vincent F.H., Paumard T., Gourgoulhon E. et Perrin G., *GYOTO : A new general relativistic ray-tracing code*, Class. Quantum Grav. **28**, 245005 (2011)
- [27] Vincent F.H., Paumard T., Gourgoulhon E. et Perrin G., *GYOTO : General relativitY Orbit Tracer of Observatoire de Paris*, <http://gyoto.obspm.fr/>, consulté le 28 janvier 2014
- [28] Wald R.M., *General relativity*, University of Chicago Press, Chicago, 1984
- [29] Will C. M., *The confrontation between General Relativity and Experiment*, Living Rev. Relativity **9**, 3 (2006)
- [30] Yunes N. et Siemens X., *Gravitational-Waves Tests of GR with Ground-Based Detectors and Pulsar-Timing Arrays*, Living Rev. Relativity **16**, 9 (2013)
- [31] Auteur anonyme, *Le modèle standard*, <http://home.web.cern.ch/fr/about/physics/standard-model>, consulté le 11 avril 2014
- [32] Auteur anonyme, *Résolution des équations différentielles*, <http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/IFT2425/Chapitre6.pdf>, consulté le 15 avril 2014
- [33] Auteur anonyme, *Électron-volt*, http://fr.wikipedia.org/wiki/C389electron-volt#Unit.C3.A9_de_masse, consulté le 1 mai 2014
- [34] Auteur anonyme, *Physique post-boson de Higgs : le tableau*, <http://sciences.blogs.liberation.fr/home/2014/02/physique-post-boson-de-higgs-le-tableau.html>, consulté le 5 mai 2014
- [35] Auteur anonyme, *Un anneau d'Einstein en fer à cheval vu par Hubble*, http://www.cidehom.com/apod.php?_date=111221, consulté le 18 mai 2014